Méthodes de calcul des fonctions de Green :
Equation aux valeurs propres pour les ondes de volume

8 mars 2000
Vincent Laude

Ce papier est un complément de celui de Jean Desbois (« Méthodes de calcul des fonctions de Green ») [1] qui décrit les méthodes de Milsom/Boyer et Fahmy :

- **Milsom/Boyer** : cette méthode consiste à résoudre un système linéaire, l'équation de Christoffel. Pour que cette équation admette des racines non-triviales, le déterminant associé doit être nul, ce qui conduit à la recherche des racines d'un polynôme. Deux paramétrisations sont possibles, en coordonnées cartésiennes (s_1, s_2) ou en coordonnées polaires (S, θ). Le premier cas est utile pour obtenir les lenteurs des modes d'un substrat semi-infini ou d'une structure stratifiée (il permet également d'obtenir les modes évanescents) ; le second cas est utile pour déterminer les lenteurs des modes de volume (propagatifs).
- **Fahmy** : cette méthode consiste à remplacer le système linéaire par une équation aux valeurs propres, dans le cas des coordonnées cartésiennes (s_1, s_2). Elle n'est donc *a priori* pas adaptée pour la détermination des lenteurs des modes de volume et SSBW.

Dans ce papier on étend la méthode Fahmy aux modes de volume.

1. Notations

Les notations sont identiques à celles de [1], à ceci près qu'on utilise la paramétrisation (**u**, t_i) de la thèse de Laurent Boyer (c'est celle de la librairie SemInfLib) reliée à celle de [1], équation (9) par :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{jw}, \hat{\mathbf{o}}_i = \frac{\mathbf{t}_i}{-jw} \tag{1}$$

Les équations (10) et (15) de [1] s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{o}}_1 &= [s_1\mathbf{A}_{11} + s_2\mathbf{A}_{12}]\mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{o}}_2 &= [s_1\mathbf{A}_{21} + s_2\mathbf{A}_{22}]\mathbf{u} \\ s_1\hat{\mathbf{o}}_1 + s_2\hat{\mathbf{o}}_2 &= \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{2}$$

2. Cas s_3=0

En posant dans (2) :

$$s_1 = S\cos q, s_2 = S\sin q \tag{3}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{o}}_1 &= [S\cos q\mathbf{A}_{11} + S\sin q\mathbf{A}_{12}]\mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{o}}_2 &= [S\cos q\mathbf{A}_{21} + S\sin q\mathbf{A}_{22}]\mathbf{u} \\ S\cos q\hat{\mathbf{o}}_1 + S\sin q\hat{\mathbf{o}}_2 &= \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{4}$$

Des deux premières équations on tire :

$$\begin{aligned} S\cos q\hat{\mathbf{o}}_1 &= [\cos^2 q\mathbf{A}_{11} + \sin q\cos q\mathbf{A}_{12}](S^2\mathbf{u}) \\ S\sin q\hat{\mathbf{o}}_2 &= [\sin^2 q\mathbf{A}_{22} + \sin q\cos q\mathbf{A}_{21}](S^2\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{5}$$

Soit en reportant dans la troisième équation :

$$\mathbf{M}(S^2\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{u} \tag{6}$$

Avec

$$\mathbf{M} = \cos^2\theta\,\mathbf{A}_{11} + \sin^2\theta\,\mathbf{A}_{22} + \sin\theta\cos\theta\,(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{21}) \tag{7}$$

On obtient au final l'équation aux valeurs propres :

$$\mathbf{Nu} = S^2\mathbf{u} \tag{8}$$

avec

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\rho}\mathbf{M}^{-1} \tag{9}$$

Du fait de la structure particulière de la matrice ρ (diagonale, dont l'élément 4,4 est nul), il y a en fait 3 valeurs propres à trouver seulement, de la même façon que pour la méthode Milsom/Boyer appliquée aux ondes de volume.

3. Cas général (s_3 non nul)

On utilise la paramétrisation des cosinus directeurs donnée par

$$\mathbf{s} = S\mathbf{c} \tag{10}$$

avec

$$\mathbf{c} = (\cos\theta\cos\psi\,,\sin\theta\cos\psi\,,\sin\psi\,)^T \tag{11}$$

En utilisant la définition complète de la matrice **A** (matrice de matrices)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix} \tag{12}$$

il suffit de remplacer l'équation (7) par

$$\mathbf{M} = \mathbf{c}^T\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{A}_{ij}c_ic_j \tag{13}$$

Les équations (8-9) restent inchangées.