Remarques Sur La Matrice Mixte

Vincent Laude

03/04/01

Le but de ce papier est de soumettre quelques remarques sur la matrice mixte et son usage pratique, et est en grande partie le fruit de l'expérience « SlownessBuddy », mise en pratique théorique et expérimentale de la théorie de Jean Desbois, résumée dans son papier fondamental sur la matrice mixte. En fait, tout ce qui suit s'applique aux pseudo-modes uniquement, c'est-à-dire à la matrice déduite des hypothèses minimales résumées dans la section 1.

1. Résumé des propriétés de la matrice mixte « aux pseudo-modes »

Postulats fondamentaux :

- Un seul type d'onde de surface existe, avec une lenteur déterminée, pouvant se propager dans les deux sens, et est représentée par une amplitude dont le module carré décrit l'énergie acoustique ;
- Une électrode est représentée par une source de courant à tension fixe (ce choix est intimement lié à la description quasi-statique de la piézo-électricité par le potentiel et la charge) ;
- Des échanges d'énergie sont possibles entre les amplitudes acoustiques et l'électrode considérée comme source de courant, par transduction piézo-électrique ;
- Les relations entre les amplitudes, le courant et la tension sont linéaires.

La forme la plus générale de la matrice mixte est alors

$$\begin{bmatrix} L_{n-1} \\ R_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_L & t_L & \alpha_L \\ t_R & r_R & \alpha_R \\ \beta_R & \beta_L & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ L_n \\ V_n \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

soit 9 paramètres complexes. La matrice mixte relie les sorties aux entrées. Le principe de réciprocité conduit de plus aux 3 relations

$$t_L = t_R = t \quad , \quad \beta_R = -\alpha_L \quad , \quad \beta_L = -\alpha_R \tag{1-2}$$

qui ramènent à 6 le nombre de paramètres complexes.

Pour aller plus loin, il faut une hypothèse supplémentaire, celle de la conservation de l'énergie. Cette hypothèse ne s'applique strictement qu'en dehors de la bande des ondes de volume. Dans le cas d'une PSAW, elle ne s'applique jamais. Il est d'usage de considérer que pour une atténuation faible, les résultats déduits de l'application de la conservation de l'énergie s'appliquent néanmoins. Nous verrons plus loin que ce n'est pas nécessairement correct.

La conservation de l'énergie s'exprime par

$$|L_{n-1}|^2 + |R_n|^2 = |L_n|^2 + |R_{n-1}|^2 + 2\Re\{I V^*\} \tag{1-3}$$

et conduit à 6 relations supplémentaires entre les paramètres. Un peu d'algèbre permet alors d'exprimer les 6 paramètres complexes de la matrice mixte en fonction de 6 paramètres réels, suivant

$$Y = G + jB \tag{1-4}$$

$$t = \cos\Delta \exp(-j\phi) \tag{1-5}$$

$$r_L = r' \exp(-j\phi_r) \quad , \quad r_R = r' \exp(j\phi_r) \quad \text{avec} \quad r' = -j \sin\Delta \exp(-j\phi) \tag{1-6}$$

$$\alpha_L = \exp(-j\phi_r/2)\,\alpha'_L \quad , \quad \alpha_R = \exp(j\phi_r/2)\,\alpha'_R \tag{1-7}$$

$$\alpha'_L = \alpha_S + \alpha_D \quad , \quad \alpha'_R = \alpha_S - \alpha_D \tag{1-8}$$

$$\alpha_S = j\sqrt{G}\cos(\delta)\exp(-j\phi/2)\exp(-j\Delta/2) \quad , \quad \alpha_D = j\sqrt{G}\sin(\delta)\exp(-j\phi/2)\exp(j\Delta/2) \qquad (1\text{-}9)$$

2. Résumé des propriétés de l'admittance harmonique d'un réseau périodique infini

Dans le cas d'un réseau périodique infini, d'après le théorème de Floquet, tous les champs doivent être γ-périodique. Pour obtenir la contribution à l'AH de l'onde de surface, on exprime cette condition pour les amplitudes acoustiques (seulement !)

$$L_{n-1} = L_n \exp(j2\pi\gamma) \quad , \quad R_{n-1} = R_n \exp(j2\pi\gamma) \qquad (2\text{-}1)$$

L'élimination de toutes les variables acoustiques amène alors à la contribution de l'onde de surface à l'AH, sous la forme

$$Y(\gamma, f) = jG\frac{\sin\phi - \cos 2\delta \sin\Delta\cos 2\pi\gamma}{\cos\phi - \cos\Delta\cos 2\pi\gamma} + jB \qquad (2\text{-}2)$$

Pour aller plus loin, le principe de la conservation de la charge permet d'éliminer un paramètre supplémentaire, en exprimant que le fait d'appliquer le même potentiel à toutes les électrodes (γ=1) ne peut créer de charges dans un IDT, soit

$$Y(\gamma=1, f) = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

(Remarque : je préfère la condition γ=1 à γ=0, car une onde progressive ne saurait être représentée par une phase de propagation nulle ! Le déphasage d'une cellule à une autre est de 2π.) La condition de conservation de la charge permet par exemple d'exprimer B en fonction des 5 autres paramètres, et permet d'écrire

$$Y(\gamma, f) = jG\frac{\cos\Delta\sin\phi - \cos 2\delta\sin\Delta\cos\phi}{\cos\Delta - \cos\phi}\frac{1-\cos 2\pi\gamma}{\cos\phi - \cos\Delta\cos 2\pi\gamma} \qquad (2\text{-}4)$$

C'est cette forme de l'AH qui est utilisée pour le « fit à 3 points » appliqué à l'entrée et à la sortie de la bande d'arrêt.

3. Commentaires sur la conservation de la charge

L'expression de l'admittance harmonique d'un réseau périodique après expression de la conservation de la charge est donnée par l'équation (2-4). Cette forme donne effectivement un pôle pour la résonance, mais également un autre pôle à basse fréquence, solution de l'équation

$$\cos(\phi) = \cos(2\pi f\ ps) = \cos\Delta \qquad (3\text{-}1)$$

soit par exemple simplement $2\pi f\ ps = \Delta$. Ce second pôle de l'AH ne correspond bien entendu à rien de physique, ce qui conduit à rejeter la condition de conservation de la charge, au moins telle qu'elle a été exprimée.

Physiquement, il me semble qu'il faut considérer séparément les cas de la propagation et de la génération de l'onde de surface par l'IDT. Si l'on revient à la façon dont la dépendance harmonique a été introduite, on voit qu'elle l'a seulement été sur les amplitudes des ondes propagatives, et non sur les grandeurs électriques. En fait le problème traité est bien plutôt celui de la propagation que celui de la génération, bien que ces deux problèmes soient liés intimement par la réciprocité piézo-électrique.

- En ce qui concerne la propagation, rien n'interdit qu'une onde de surface se propageant exactement en phase avec la période du réseau (γ=1) puisse générer un courant dans les électrodes (la connexion des électrodes n'a d'ailleurs même pas été précisée).
- En ce qui concerne la génération, il est clair physiquement qu'une excitation avec γ entier ne peut pas engendrer une onde de surface sur un substrat semi-infini.

Mon sentiment est qu'il ne faut pas imposer de condition de conservation de la charge (tout au moins sans préciser la connectivité électrique), mais plutôt considérer que les paramètres de la matrice mixte dépendent de façon explicite de la fréquence, et probablement aussi du paramètre de Floquet γ. Par exemple, une étude simple de la normalisation énergétique en fonction de la fréquence conduit à penser qu'il faut prendre G variant quadratiquement avec la fréquence. Par ailleurs, tous les fits réalisés sur nombre de coupes me conduisent à penser que B est identiquement nul (dans le sens où le fait d'ajouter ce paramètre n'améliore pas la qualité de l'estimation). Cela revient à dire qu'il n'y a aucune raison d'associer un comportement électrique autre qu'une double transduction à une cellule élémentaire de la matrice mixte. Dans un modèle plus complet, il suffit d'ajouter une capacité statique et des impédances supplémentaires pour tenir compte de la réalité des électrodes, une fois la connectivité précisée.

La normalisation des calculs d'admittance harmonique telle que définie par Pascal Ventura m'a conduit à la forme suivante pour l'admittance harmonique :

$$Y(\gamma, f) = jG\, fp \frac{\sin(2\pi\, fp\, s) - \cos 2\delta \sin\Delta \cos(2\pi\gamma)}{\cos(2\pi\, fp\, s) - \cos\Delta \cos(2\pi\gamma)} + jC\sin(\pi|\gamma|) \qquad \text{(3-2)}$$

où C est la capacité statique, c'est-à-dire en l'absence d'onde de surface, et avec pour définition du « couplage »

$$\Gamma = \frac{G}{C} \qquad \text{(3-3)}$$

qui correspond intuitivement au rapport de l'énergie transduite à l'énergie stockée par effet capacitif dans l'IDT.

La pratique du fit sur différentes coupes me conduit aux observations suivantes. L'expression (3-2) convient pour décrire les SAW avec une très bonne précision, et les PSAW sous certaines réserves, avant et dans la bande d'arrêt ; après la bande d'arrêt elle convient moins bien dans tous les cas (à cause du rayonnement par ondes de volume) ; pour les PSAW elle ne convient surtout que juste avant et dans la bande d'arrêt à cause des pertes acoustiques de propagation (cf. section 5). L'expression classique (2-4) ne convient jamais, surtout loin de la bande d'arrêt ; cependant elle est quasiment identique à (2-2) au niveau de la bande d'arrêt (cf. section 7).

Par ailleurs, la valeur de la capacité statique n'est pas en général donnée par l'expression « classique » de l'admittance harmonique d'un substrat non piézo-électrique

$$Y(\gamma) = j2\omega\epsilon\sin(\pi\gamma)\frac{P_{-\gamma}(X)}{P_{-\gamma}(-X)} \quad \text{avec} \quad X = \cos(\pi a/p) \quad \text{et} \quad \epsilon = \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22} - \epsilon_{12}^2} \qquad \text{(3-4)}$$

En effet, on trouve en particulier en simulation que cette capacité statique est dispersive (dépend de la fréquence) dès que les électrodes ne sont pas infiniment minces. La raison physique d'une telle dépendance n'est pas encore élucidée (peut-être que la distribution de charge électrostatique crée une distribution de contraintes mécaniques statiques dans l'électrode, qui peut rétro-agir sur la distribution de charge ?). Quoi qu'il en soit, la valeur de la capacité statique dans (3-3) doit donc être déterminée par fit. En pratique, je l'estime initialement par l'admittance harmonique pour γ=1/2 et à fréquence très basse, dans une région où seule la capacité statique influe. Cette procédure donne d'excellents résultats.

4. Expression des déplacements dans un réseau périodique infini

A partir de la condition de Floquet (2-1), les grandeurs mécaniques ont été éliminées pour obtenir l'admittance. Cependant, les déplacements (représentés par les amplitudes des modes propagatifs) ont été obtenus au passage

$$\begin{bmatrix} R_{n-1} \\ L_n \end{bmatrix} = \frac{\exp(j\phi)}{2(\cos\phi - \cos\Delta\cos 2\pi\gamma)} \begin{bmatrix} r'\exp(j\phi_r) & \exp(2j\pi\gamma) - t \\ \exp(-2j\pi\gamma) - t & r'\exp(-j\phi_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_R \end{bmatrix} V_n \qquad \text{(4-1)}$$

Après un peu d'algèbre on arrive à

$$\frac{R_n}{V_n} = -\frac{\sqrt{G}\exp(j(-\pi\gamma - \phi_r/2))}{\cos\phi - \cos\Delta\cos 2\pi\gamma}\left(\cos\delta\sin(\pi\gamma - \Delta/2 + \phi/2) + j\sin\delta\sin(\pi\gamma + \Delta/2 + \phi/2)\right) \qquad \text{(4-2)}$$

et

$$\frac{L_n}{V_n} = -\frac{\sqrt{G}\exp(j(-\pi\gamma+\phi_r/2))}{\cos\phi-\cos\Delta\cos 2\pi\gamma}\big(\cos\delta\sin(-\pi\gamma-\Delta/2+\phi/2)-j\sin\delta\sin(-\pi\gamma+\Delta/2+\phi/2)\big) \quad (4\text{-}3)$$

Les expressions (4-2) et (4-3) deviennent dans le cas où $\gamma=1/2$

$$\frac{R_n}{V_n} = -j\frac{\sqrt{G}\exp(-j\phi_r/2)}{\cos\phi+\cos\Delta}\big(\cos\delta\cos(\phi/2-\Delta/2)+j\sin\delta\cos(\phi/2+\Delta/2)\big) \quad (4\text{-}4)$$

et

$$\frac{L_n}{V_n} = -j\frac{\sqrt{G}\exp(j\phi_r/2)}{\cos\phi+\cos\Delta}\big(\cos\delta\cos(\phi/2-\Delta/2)-j\sin\delta\cos(\phi/2+\Delta/2)\big) \quad (4\text{-}5)$$

Une difficulté est qu'un programme de simulation du type FEM/BEM ne renseigne pas directement sur les amplitudes des modes électro-acoustiques, mais sur les déplacements et contraintes généralisés à l'interface. Pour obtenir l'énergie associée il faudrait au moins savoir intégrer dans la profondeur (suivant l'axe x2), ce qui est *a priori* faisable pour les SAW, mais certainement difficile pour les PSAW (en raison du mode partiel de volume). Plus simplement, l'amplitude du « mode » électro-acoustique à la frontière droite de la cellule de la matrice mixte est donnée par

$$L_n+R_n \quad (4\text{-}6)$$

et cette quantité qui peut probablement être comparée à la simulation. Toujours dans le cas où $\gamma=1/2$, on a

$$\frac{L_n+R_n}{V_n} = -j\frac{2\sqrt{G}}{\cos\phi+\cos\Delta}\big(\cos(\phi_r/2)\cos\delta\cos(\phi/2-\Delta/2)+\sin(\phi_r/2)\sin\delta\cos(\phi/2+\Delta/2)\big) \quad (4\text{-}7)$$

et le terme entre parenthèses se simplifie encore pour les points particuliers que sont l'entrée et la sortie de la bande d'arrêt, ainsi que résumé dans le tableau suivant

	$\cos(\phi/2-\Delta/2)$	$\cos(\phi/2+\Delta/2)$
Entrée BA $(\phi=\pi-\Delta)$	$\sin\Delta$	0
Entrée BA $(\phi=\pi+\Delta)$	0	$-\sin\Delta$

On trouve donc en entrée de bande d'arrêt

$$\frac{L_n+R_n}{V_n} = -j\frac{2\sqrt{G}\cos(\phi_r/2)\cos\delta\sin\Delta}{\cos\phi+\cos\Delta} \quad (4\text{-}8)$$

et en sortie de bande d'arrêt

$$\frac{L_n+R_n}{V_n} = j\frac{2\sqrt{G}\sin(\phi_r/2)\sin\delta\sin\Delta}{\cos\phi+\cos\Delta} \quad (4\text{-}9)$$

5. Atténuation

L'idée que je propose est de représenter les pertes par atténuation sous forme d'une « classe poubelle » à laquelle les modes acoustiques et électriques peuvent céder de l'énergie sans pour autant qu'ils puissent s'en faire rétrocéder. En pratique, cela peut se traduire par l'ajout d'une quatrième sortie à la matrice mixte, tout en conservant les trois entrées, suivant

$$\begin{bmatrix} L_{n-1} \\ R_n \\ I_n \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_L & t_L & \alpha_L \\ t_R & r_R & \alpha_R \\ \beta_R & \beta_L & Y \\ w_R & w_L & w_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ L_n \\ V_n \end{bmatrix} \tag{5-1}$$

Cette formulation permet de formuler le principe de conservation de l'énergie suivant

$$|L_{n-1}|^2 + |R_n|^2 + |W_n|^2 = |L_n|^2 + |R_{n-1}|^2 + 2\Re\{I V^*\} \tag{5-2}$$

où $|W_n|^2$ représente spécifiquement l'énergie perdue, par exemple par rayonnement d'ondes de volume. A supposer que la notion de réciprocité s'applique toujours (je ne sais pas bien formuler cette propriété dans le cas présent), les formules (1-2) restent valables, et la condition de conservation de l'énergie (5-2) conduit aux 6 relations

$$|r_L|^2 + |t|^2 + |w_R|^2 = 1 \tag{5-3}$$

$$|r_R|^2 + |t|^2 + |w_L|^2 = 1 \tag{5-4}$$

$$|\alpha_L|^2 + |\alpha_R|^2 + |w_e|^2 = 2G \tag{5-5}$$

$$r_L t^* + t r_R^* + w_R w_L^* = 0 \tag{5-6}$$

$$r_L \alpha_L^* + t \alpha_R^* + \alpha_L + w_R w_e^* = 0 \tag{5-7}$$

$$r_R \alpha_R^* + t \alpha_L^* + \alpha_R + w_L w_e^* = 0 \tag{5-8}$$

On s'aperçoit qu'à l'exception du cas où la cellule élémentaire est symétrique, il n'y aucune raison pour que les modules des coefficients de réflexion à droite et à gauche soient égaux, du fait que les atténuations à droite et à gauche ne sont pas nécessairement égales. Il en va de même pour les phases à la réflexion qui ne vérifient plus la relation

$$\phi_L + \phi_R = 2\phi + \pi \tag{5-9}$$

caractéristique des pertes nulles (qui est une conséquence de (5-6) dans ce cas).

Pour aller plus loin, nous allons néanmoins supposer que les atténuations à gauche et à droite sont identiques en module, et poser

$$\exp(-2\beta) = 1 - |w|^2 \tag{5-10}$$

Les modules des coefficients de réflexion à droite et à gauche sont alors égaux, et on peut modifier (1-5) et (1-6) suivant

$$|t| = \exp(-\beta)\cos\Delta \tag{5-11}$$

$$|r| = \exp(-\beta)\sin\Delta \tag{5-12}$$

les phases à la réflexion et à la transmission restant sans relation. Un point important est que la formule du pôle est modifiée par l'atténuation. En effet elle provient dans le cas sans pertes du déterminant de la matrice des déplacements (4-1) qui s'écrit

$$D = 1 + t^2 - r_L r_R - 2t\cos(2\pi\gamma) = 2\exp(-j\phi)(\cos\phi - \cos\Delta\cos(2\pi\gamma)) \tag{5-13}$$

et devient dans le cas de pertes

$$D = 2\exp(-j\bar{\phi})(\cos\bar{\phi} - \cos\Delta\cos(2\pi\gamma)) - \sin^2\Delta(\exp(-2j\bar{\phi}) + \exp(-j(\bar{\phi}_L + \bar{\phi}_R))) \tag{5-14}$$

avec pour définition des phases complexes

$$\bar{\phi} = \phi - j\beta \quad , \quad \bar{\phi}_L = \phi_L - j\beta \quad \text{et} \quad \bar{\phi}_R = \phi_R - j\beta \tag{5-15}$$

Les formules (5-14) et (5-15) amènent les commentaires suivants

- Il ne suffit pas de complexifier les paramètres de la matrice mixte pour prendre en compte les PSAW, comme on le fait généralement.
- Le pôle (complexe) est déplacé par rapport à la formule classique (5-13) par un terme additionnel proportionnel au coefficient de réflexion en intensité et au désaccord de phase par rapport à la relation (5-9). Plus précisément, on peut utiliser la relation (5-6) pour transformer (5-14) selon

$$D=2\exp(-j\bar{\phi})(\cos\bar{\phi}-\cos\Delta\cos(2\pi\gamma))+2\tan\Delta\exp(-\beta)\, sh\,\beta\exp(-j(\phi+\phi_R+\psi_L-\psi_R)) \qquad (5\text{-}16)$$

où ψ est la phase de *w*. En pratique, la forme classique est d'autant moins valable que la PSAW présente des pertes ou que son coefficient de réflexion est important. En simulation, on observe toujours que la qualité du fit du modèle de la matrice mixte est moins bonne pour une PSAW que pour une SAW, voire même qu'il devient parfois impossible (cas du tantalate 36 ou 42 loin de la bande d'arrêt).

6. Matrice mixte aux amplitudes et conservation de l'énergie

Nous nous replaçons ici dans le cadre strict de la conservation de l'énergie.

Le choix de représenter les grandeurs électriques en courant et tension est relativement arbitraire *a priori*. En effet, cette description ne peut pas en principe être indépendante d'une impédance de charge à laquelle l'IDT serait connecté. En pratique, il s'avère que cette impédance est identifiée à une double transduction, à travers la relation

$$2G=|\alpha_R|^2+|\alpha_L|^2 \qquad (6\text{-}1)$$

Il est clair que cette relation est imposée par la conservation de l'énergie pour une source uniquement électrique (pas d'apport d'énergie acoustique), mais qu'elle ne saurait tenir en toute rigueur en présence de pertes, et donc en particulier pour une PSAW. La signification physique de l'équation (6-1) est qu'un courant circulant dans l'électrode doit nécessairement provenir d'une transduction directe suivie d'une transduction indirecte, les modes acoustiques gauche et droit servant de vecteur de transport d'énergie.

Reprenons la condition de conservation d'énergie (1-3) ainsi que simultanément les conditions de Floquet (2-1). Il est clair que

$$|L_{n-1}|=|L_n| \quad , \quad |R_{n-1}|=|R_n| \qquad (6\text{-}2)$$

d'où l'on déduit immédiatement que

$$\Re\{I V^*\}=0 \qquad (6\text{-}3)$$

C'est-à-dire que la variation d'énergie électrique est toujours nulle ! D'où l'on déduit que le courant circulant dans les électrodes est en quadrature avec le potentiel, donc nécessairement imaginaire pur (pour *V* réel). Si cette conclusion n'a rien de surprenant, (6-3) ne permet pas de conclure sur la proportion de l'énergie totale qui se retrouve sous forme électrique, et ne permet donc pas de définir objectivement un couplage.

Pour toutes ces raisons, il peut apparaître plus naturel de représenter les grandeurs électriques par des amplitudes entrantes et sortantes, de la même façon que pour les grandeurs acoustiques, ce qui conduit à une matrice mixte du type

$$\begin{bmatrix} L_{n-1} \\ R_n \\ S_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_L & t_L & \alpha_L \\ t_R & r_R & \alpha_R \\ \beta_R & \beta_L & r_E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{n-1} \\ L_n \\ E_n \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}4)$$

Par réciprocité, la matrice mixte aux amplitudes est symétrique

$$t_L=t_R=t \quad , \quad \beta_R=\alpha_L \quad , \quad \beta_L=\alpha_R \qquad (6\text{-}5)$$

(noter l'absence du signe moins) et la conservation de l'énergie se traduit par

$$|L_{n-1}|^2+|R_n|^2+|S_n|^2=|L_n|^2+|R_{n-1}|^2+|E_n|^2 \qquad (6\text{-}6)$$

d'où l'on déduit que la matrice mixte est unitaire

$$M^{+}M=I \tag{6-7}$$

Comme dans le cas de la matrice mixte classique, la réciprocité et la conservation de l'énergie réduisent le nombre de paramètres indépendants à 6, mais la paramétrisation n'est pas aisée à choisir. Il y a en effet de nombreuses possibilités, correspondant aux représentations du groupe des rotations dans l'espace euclidien. A la différence de la description en courant et tension, il n'y a pas de normalisation indépendante des grandeurs acoustiques et électriques, et les relations obtenues ne peuvent être aussi simples. Un avantage de cette description est cependant de permettre la définition objective d'un couplage piézo-acoustique. Toujours dans le cas d'un IDT périodique et infini (ce qui implique la relation (6-2)), on obtient

$$|S_n|=|E_n| \tag{6-8}$$

c'est-à-dire qu'il sort autant d'énergie électrique qu'il en rentre dans une cellule, ce qui est bien-sûr équivalent à la relation (6-3). Une définition objective du couplage à gauche et à droite peut être alors

$$\Gamma_L=\frac{|L_n|^2}{|L_n|^2+|R_n|^2+|E_n|^2} \tag{6-9}$$

et

$$\Gamma_R=\frac{|R_n|^2}{|L_n|^2+|R_n|^2+|E_n|^2} \tag{6-10}$$

qui représente la fraction de l'énergie totale stockée dans la cellule qui est de nature acoustique.

On peut passer de la matrice mixte « classique » à la matrice mixte aux amplitudes en utilisant la définition

$$V_n=\frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{2}}(E_n+S_n) \quad , \quad I_n=\frac{1}{\sqrt{2Z}}(E_n-S_n) \tag{6-11}$$

et son inverse

$$E_n=\frac{1}{\sqrt{2Z}}(V_n+ZI_n) \quad , \quad S_n=\frac{1}{\sqrt{2Z}}(V_n-ZI_n) \tag{6-12}$$

où Z est l'impédance de charge (arbitraire ?) ramenée à une cellule de la matrice mixte. On obtient la matrice mixte aux amplitudes à partir de la matrice mixte classique suivant

$$M_m=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T & Y \end{bmatrix} \quad , \quad M_a=\begin{bmatrix} A+\frac{Z}{1+YZ}\alpha\alpha^T & \frac{\sqrt{2Z}}{1+YZ}\alpha \\ \frac{\sqrt{2Z}}{1+YZ}\alpha^T & \frac{1-YZ}{1+YZ} \end{bmatrix} \tag{6-13}$$

La morale de cette histoire est qu'un couplage objectivement défini doit dépendre de l'impédance de charge. En pratique, après le calcul par la matrice mixte classique, on peut obtenir par (6-12) les amplitudes électriques entrantes et sortantes, puis utiliser (6-9) et (6-10) pour estimer le couplage sur une base énergétique. Les déplacements auront préalablement été obtenus suivant les formules de la section 4.

7. Fit en entrée et sortie de la bande d'arrêt, type TMX

Le fit de type TMX repose sur la localisation de 2 points de fréquence caractérisés par le fait que le pseudo-pôle intervient pour γ=1/2, soit

$$\cos(\phi)=\cos(2\pi f\ ps)=-\cos\Delta \tag{7-1}$$

ce qui conduit à poser

$$2\pi f\ ps=\pi\pm\Delta \tag{7-2}$$

La relation (2-4) devient alors pour ces deux points

$$Y(\gamma=1/2, f)=jG\tan\Delta\frac{\mp 1+\cos 2\delta}{2}\frac{2}{\text{pôle}} \quad \text{avec} \quad \text{pôle}=\frac{\cos\phi}{\cos\Delta}+1 \tag{7-3}$$

Rappelons que dans (2-4) la condition de conservation de la charge a été exprimée. Si l'on compare avec (3-2), c'est-à-dire sans conservation de la charge et pour *B*=0, et sans tenir compte de la capacité statique

$$Y(\gamma=1/2, f)=jG\,fp\frac{\sin(2\pi\,fps)+\cos 2\delta\sin\Delta}{\cos\Delta\times\text{pôle}}=jG\,fp\tan\Delta\frac{\mp 1+\cos 2\delta}{\text{pôle}} \tag{7-4}$$

Et l'on voit que les deux formules s'identifient ! Cela revient à dire que tous les programmes de fit type TMX ne sont heureusement pas affectés par le principe de la conservation de la charge, mais que c'est plus que fortuit. Ce n'est pas le cas des autres types de fit.

Dans le cas d'une PSAW, les formules (5-14) ou (5-16) montrent que le pôle est déplacé par l'atténuation, comme cela a déjà été discuté section 5. En conséquence, l'entrée et la sortie de la bande d'arrêt ne sont pas des notions bien définies, et ne correspondent pas nécessairement à γ=1/2 comme supposé par la méthode TMX.

8. Fit à fréquence fixe (dans et hors de la bande d'arrêt), type SlownessBuddy

Le principe de ce fit est similaire à celui du fit TMX de la section précédente, à la différence qu'il est pratiqué pour deux points de fréquence très proches (de sorte que les paramètres sont estimés à une fréquence moyenne) mais non nécessairement confondus avec des points remarquables comme l'entrée et la sortie de la bande d'arrêt. Dans un premier temps, on localise les 2 pseudo-pôles (1 pour chaque fréquence) en faisant varier γ, et on en déduit une première estimation de ϕ, Δ et G. Cette estimation est raffinée, ainsi que celle des autres paramètres, par un algorithme de recuit simulé permettant de faire coller au mieux les données au modèle. Cette procédure permet d'obtenir les variations des paramètres de la matrice mixte avec la fréquence.

9. Fit en fréquence pour γ = ½, type HUT

L'admittance harmonique en γ=1/2 s'écrit à partir de (3-2)

$$Y(\gamma=1/2, f)=jG\,fp\frac{\sin(2\pi\,fps)+\cos 2\delta\sin\Delta}{\cos(2\pi\,fps)+\cos\Delta}+jC \tag{9-1}$$

Il s'avère en pratique que cette forme ne permet pas un fit efficace des paramètres de la matrice mixte, du fait que les paramètres ϕ et Δ sont très ambigus (c'est d'ailleurs pour cela qu'il faut au moins deux points en fréquence pour les méthodes des sections 7 et 8). La solution de Julius Koskela est de considérer deux valeurs de γ, ½ et ½-ε, afin de faire apparaître une résonance en sortie de bande d'arrêt dans le cas très usuel où δ=0.

Une alternative à tester serait de prendre γ quelconque entre 0 et ½ (mais différent de ces deux valeurs) afin de faire apparaître l'anti-résonance, et d'estimer les paramètres à partir de la courbe en fréquence. Cela permettrait de vérifier que les paramètres de la matrice mixte ne dépendent pas de γ...

****** THE END ******