C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série II *b*, p. 793–798, 1998
Mécanique des solides et des structures/*Mechanics of solids and structures*

Deux modèles de plaque mince avec inclusions piézoélectriques et circuits électroniques distribués

Éric CANON, Michel LENCZNER

Laboratoire de calcul scientifique, UMR CNRS 6623, université de Franche-Comté, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France

(Reçu le 15 mai 1998, accepté le 3 juin 1998)

Résumé. On présente deux modèles de plaque mince élastique avec inclusions fines de piézoélectriques et circuits électroniques périodiquement distribués. C'est un premier exemple de matériau composite adaptatif, même si l'électronique envisagée reste rudimentaire. Des circuits plus élaborés seront envisagés par ailleurs. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

homogénéisation / plaques composites / piézoélectriques / matériaux intelligents / plaques élastiques

Models of thin plates with piezoelectric inclusions and electronic circuits

Abstract. *This paper presents two models of thin elastic plates with periodically distributed piezoelectric inclusions and electronic circuits. This is a first example of a smart composite material, although the considered electronic is rather rudimentary. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris*

homogenization / composite plates / piezoelectric / smart materials / elastic plates

Abridged English Version

This work is motivated by the design of smart materials. In [1, 2], we consider modelling of thin elastic plates with small piezoelectric inclusions and electronic circuits. The inclusions are strictly included in the elastic matrix, which is considered as electrically insulated. Different kinds of boundary conditions are considered for the electrostatic equation on the upper faces of the inclusions, corresponding to different kinds of control: electric potential imposed, electric current imposed, local or non-local electric circuits. All the possible cases when the thickness a of the plate and the characteristic dimension ε of the inclusions tend together to zero are considered: $a/\varepsilon \to 0$, $\varepsilon/a \to 0$, $a = \varepsilon$. Reference [1] is for models with a small number of inclusions, reference [2] for models with a great number of inclusions, requiring homogenization.

The aim of this note is to announce and introduce this work by presenting two of the models obtained in reference [2], for $a/\varepsilon \to 0$. The first one corresponds to local circuits: the upper and lower faces of each inclusion are connected through an electrical circuit; this leads to mixed boundary

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

conditions for the electrostatic equation. In the second model, the upper faces of the inclusions are in addition connected to their direct neighbours. We present the first model in detail. We just mention the form of the second model: a complete development would exceed the framework of a note to the Comptes Rendus.

For the first model, the equations governing the field of displacements u^b and the electrical potential φ^b are given by equations (1) and (2). The main assumptions on the data are equations (3), (4) and (7). By rescaling the plate from $\Omega^a = \omega \times]-a, a[$ to $\Omega = \omega \times]-1, 1[$, one obtains the weak formulation [equations (5) and (6)]. Derivation of the effective model consists then of three steps. The first one is to characterize the limit $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}^b, \varphi^b)$: lemma 1 and 2. The second is to compute the transverse components with respect to the components in the directions of the plate: lemma 3. The last step consists in eliminating the local variables: lemma 4. Finally, we are led to the limit model: equations (11) and (12). It has the classical form of the plate model, although some additional terms occur, corresponding to the electrical field and the electrical circuits.

For the second model, the boundary condition for the electrostatic equation on the upper faces is replaced by equation (13). In this situation, elimination of the transverse component L_3^0 of the electrical field is no longer possible, because of the Laplace operator induced on this term by equation (13). This leads to a non-classical type of model: equation (14). This corresponds to a model of transfinite networks' type, described for example in reference [3], but with a different point of view. Note that one can choose a priori the form of the operator on L_3^0 by choosing the way of connecting the upper faces of the inclusions. We get here a complete family of transfinite networks.

Complete models and proofs are given in reference [2]. We use essentially two-scale convergence [4, 5] for homogenization, coupled with the classical methods of plate theory.

1. Introduction

Ce travail est motivé par la conception de matériaux adaptatifs, c'est-à-dire ayant la propriété de se contrôler par eux-mêmes. Dans [1, 2], on modélise des structures composées de plaques élastiques fines avec inclusions de piézoélectriques, et de circuits électriques simples. Les modèles sont statiques, mais s'étendent au dynamique via la transformée de Laplace. Chaque inclusion est isolée dans la matrice élastique. Le champ électrique dans la matrice n'interagit pas avec le champ électrique dans les inclusions. Différents types de conditions aux limites sont envisagés pour l'équation de la piézoélectricité, sur les faces supérieures des inclusions. Elles correspondent à différents types de contrôle : potentiel électrique imposé, courant électrique imposé, circuits électriques locaux ou non. Dans [1] ont été présentés les modèles à petit nombre d'inclusions. Dans [2], on présente ceux à grand nombre d'inclusions, nécessitant homogénéisation. On y considère tous les cas possibles lorsque l'épaisseur a de la plaque et la dimension caractéristique ε des inclusions tendent ensemble vers zéro : $a/\varepsilon \to 0$, $\varepsilon/a \to 0$, $a = \varepsilon$.

L'objet de cette note est d'introduire et d'annoncer ce travail de modélisation en présentant deux des modèles obtenus pour $a/\varepsilon \to 0$. Le premier correspond aux circuits électriques locaux : les faces supérieure et inférieure de chaque inclusion sont reliées par un circuit électrique, ce qui conduit à l'écriture de conditions aux limites mixtes pour l'équation électrostatique. Dans le second modèle, les faces supérieures des inclusions sont, en outre, reliées entre elles par d'autres circuits électriques. On présente le premier modèle plus en détail. Pour le second, on se contente de mentionner la forme du modèle final : vu la relative complexité des notations, une présentation plus développée excéderait le cadre d'une note aux *Comptes rendus*. Le premier modèle a la forme d'un modèle classique de plaque, même si des coefficients supplémentaires apparaissent, liés au champs et aux circuits électriques. Le plus intéressant est le second modèle : un opérateur de Laplace apparaît sur la composante transverse du champ électrique. C'est un modèle du type des réseaux transfinis décrits par exemple dans [3], mais d'une toute autre façon. Soulignons que l'on peut choisir a priori l'opérateur portant sur la composante transverse du champ en choisissant la façon de connecter les faces supérieures. On obtient en fait une famille complète de réseaux transfinis.

Pour les démonstrations, et certains détails techniques mineurs du point de vue de la modélisation, on renvoie à [2]. On y utilise essentiellement la convergence à deux échelles [4, 5] couplée aux méthodes classiques de théorie des plaques [6]. Les modèles présentés ici sont des versions simplifiées de [2] (théorème 2.2 (i) et (ii)). Sur les problèmes mêlant plaques et homogénéisation, il convient de citer [7] qui utilise la méthode de l'énergie de Tartar.

2. Modèle avec circuits électriques locaux

2.1. *Géométrie*

La plaque est représentée par $\Omega^a = \omega \times]-a, a[$ où ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. En utilisant les changements d'échelle et de variables introduits dans [6], on se ramène au domaine fixe $\Omega = \omega \times]-1, 1[$. Le domaine ω est partagé en ω_1^ε et ω_2^ε construits comme suit : soit Y un domaine rectangle de $\mathbb{R}^2$ et $Y_1 \subset\subset Y$, $Y_1 \neq \emptyset$; ω_1^ε est l'union de toutes les translations εY-périodiques de εY_1 qui sont strictement inclues dans ω ; $\omega_2^\varepsilon = \omega \setminus \overline{\omega_1^\varepsilon}$. Soit $b = (a, \varepsilon)$. On note la matrice élastique $\Omega_2^b = \omega_2^\varepsilon \times]-a, a[$, l'ensemble des inclusions $\Omega_1^b = \omega_1^\varepsilon \times]-a, a[$. On note Γ^a la frontière latérale de Ω^a, et $\Gamma^{a\,\pm} = \omega \times \{-a, a\}$. Les frontières des inclusions sont $\Gamma_{\text{inc}}^{+b} = \omega_1^\varepsilon \times \{-a\}$, $\Gamma_{\text{inc}}^{-b} = \omega_1^\varepsilon \times \{-a\}$, $\Gamma_{\text{inc}}^{b} = \partial\omega_1^\varepsilon \times]-a, a[$. Lorsqu'on fait référence à Ω, les notations sont les mêmes, mais l'exposant a est supprimé.

2.2. *Équations microscopiques*

On adopte la convention d'Einstein de sommation des indices répétés. On utilise l'alphabet latin pour les indices variant de 1 à 3, l'alphabet grec pour les indices de 1 à 2. On désigne par $\boldsymbol{u}^b = {}^t(\boldsymbol{u}_1^b, \boldsymbol{u}_2^b, \boldsymbol{u}_3^b)$ le champ des déplacements élastiques, par φ^b le potentiel électrique. Les équations régissant la plaque sont :

$$\begin{cases} \mathbf{div}\, \sigma^b = \mathbf{0} \text{ et div } \mathbf{D}^b = 0 \text{ dans } \Omega^a, \boldsymbol{u}^b = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma^a, \sigma^b \cdot \boldsymbol{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma^{a\,\pm}, \\ \boldsymbol{D}^b \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{inc}}^b, \varphi^b = \varphi_m^b \text{ sur } \Gamma_{\text{inc}}^{-b}, \langle \boldsymbol{D}^b \cdot \boldsymbol{n} \rangle = -a^{-1} G(\varphi^b - \varphi_m^b) + h^b \text{ sur } \Gamma_{\text{inc}}^{+b} \end{cases} \tag{1}$$

où

$$\sigma_{ij}^b = R_{ijkl}^\varepsilon s_{kl}(\boldsymbol{u}^b) + d_{kij}^\varepsilon \partial_k \varphi^b, \quad D_k^b = -d_{kij}^\varepsilon s_{ij}(\boldsymbol{u}^b) + c_{ki}^\varepsilon \partial_i \varphi^b, \quad s_{ij}(\boldsymbol{v}) = (\partial_i v_j + \partial_j v_i)/2 \tag{2}$$

Dans l'expression (1), $< \cdot >$ désigne la valeur moyenne sur la face supérieure de chaque inclusion, la source de courant h^b et le potentiel électrique imposé φ_m^b sont constants sur chaque inclusion. Cela exprime que ces faces sont recouvertes d'un film conducteur, ce qui est le cas dans les applications envisagées. Les autres notations sont : $(R_{ijkl}^\varepsilon)_{ijkl = 1\dots3}$, $(d_{ijk}^\varepsilon)_{ijk = 1\dots3}$ et $(c_{ij}^\varepsilon)_{ij = 1\dots3}$ les tenseurs d'élasticité, de piézoélectricité et de permitivité, G/a l'admittance des circuits, $G > 0$ fixé. Le fait que le champ électrique n'agisse pas sur la matrice élastique se traduit par :

$$d_{ijk}^\varepsilon = c_{ij}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_2^\varepsilon \tag{3}$$

En regroupant les trois tenseurs précédents dans le tenseur $\mathcal{R}^\varepsilon$ égal à :

$$\begin{pmatrix} (R^\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta})_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2} & (2R^\varepsilon_{\alpha\beta\gamma3})_{\alpha,\beta,\gamma=1,2} & (R^\varepsilon_{\alpha\beta33})_{\alpha,\beta=1,2} & (d^\varepsilon_{\gamma\alpha\beta})_{\alpha,\beta,\gamma=1,2} & (d^\varepsilon_{3\alpha\beta})_{\alpha\beta=1,2} \\ (2R^\varepsilon_{\alpha3\gamma\delta})_{\alpha,\gamma,\delta=1,2} & (4R^\varepsilon_{\alpha3\gamma3})_{\alpha,\gamma=1,2} & (2R^\varepsilon_{\alpha333})_{\alpha=1,2} & (2d^\varepsilon_{\gamma\alpha3})_{\alpha,\gamma=1,2} & (2d^\varepsilon_{3\alpha3})_{\alpha=1,2} \\ (R^\varepsilon_{33\gamma\delta})_{\gamma,\delta=1,2} & (2R^\varepsilon_{33\gamma3})_{\gamma=1,2} & R^\varepsilon_{3333} & (d^\varepsilon_{\gamma33})_{\gamma=1,2} & d^\varepsilon_{333} \\ (-d^\varepsilon_{\alpha\gamma\delta})_{\alpha,\gamma,\delta=1,2} & (-2d^\varepsilon_{\alpha\gamma3})_{\alpha,\gamma=1,2} & (-d^\varepsilon_{\alpha33})_{\alpha=1,2} & (c^\varepsilon_{\alpha\gamma})_{\alpha,\gamma=1,2} & (c^\varepsilon_{\alpha3})_{\alpha=1,2} \\ (-d^\varepsilon_{3\gamma\delta})_{\gamma,\delta=1,2} & (-2d^\varepsilon_{3\gamma3})_{3,\gamma=1,2} & -d^\varepsilon_{333} & (c^\varepsilon_{3\gamma})_{\gamma=1,2} & c^\varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

en supposant les symétries

$$R^\varepsilon_{ijkl} = R^\varepsilon_{klij} = R^\varepsilon_{jikl}, \quad c^\varepsilon_{ij} = c^\varepsilon_{ji}, \quad d^\varepsilon_{ijk} = d^\varepsilon_{ikj}, \quad \forall i,j,k,l = 1 \ldots 3, \tag{4}$$

et en effectuant le changement d'échelle $\Omega^a \to \Omega$, on aboutit à la formulation faible :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega {}^t\boldsymbol{M}^a(\boldsymbol{V})\,\mathcal{R}^\varepsilon\,\boldsymbol{M}^a(\boldsymbol{U}^b)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{a^2}\int_{\Omega_1^\varepsilon} G\mathcal{M}(\partial_3\varphi^b)\,\partial_3\psi\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{\Omega^{\varepsilon_1}} h^b\,\partial_3\psi\,\mathrm{d}x, \\ \forall \boldsymbol{V} = (\boldsymbol{v},\psi) \in W^\varepsilon, \boldsymbol{U}^b \in (H^1(\Omega))^3 \times H^1(\Omega_1^\varepsilon), \boldsymbol{u}^b = \boldsymbol{0} \text{ sur } \Gamma, \varphi^b = \varphi^b_m \text{ sur } \Gamma^{-a}_{\text{inc}} \end{cases} \tag{5}$$

où l'on a noté $\boldsymbol{U}^b = (\boldsymbol{u}^b, \varphi^b)$, $\mathcal{M}(\psi) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \psi\,\mathrm{d}x_3$, $W^\varepsilon\{(\boldsymbol{v},\psi) \in (H^1(\Omega))^3 \times H^1(\Omega_1^\varepsilon)\,;\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ sur Γ, $\psi = 0$ sur Γ^{-a}_{inc}, ψ est constant sur chaque composante connexe de $\Gamma^{+a}_{\text{inc}}\}$,

$$\boldsymbol{M}^a(\boldsymbol{V}) = {}^t\big((s_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}))_{\alpha,\beta=1,2},\ a^{-1}(s_{\alpha3}(\boldsymbol{v}))_{\alpha=1,2},\ a^{-2}s_{33}(\boldsymbol{v}),\ (\partial_\alpha\psi)_{\alpha=1,2}, a^{-1}\partial_3\psi\big) \tag{6}$$

2.3. *Hypothèses*

Outre celles déjà mentionnées, notamment (3) et (4), on suppose que

$$\begin{cases} (h^b)_{b>0} \text{ converge à deux échelles vers } h \in L^2(\omega) \text{ dans } L^2(\omega \times Y_1), \\ (\varphi^b_m)_{b>0} \text{ converge à deux échelles vers } \varphi_m \in H^1(\omega) \text{ dans } L^2(\omega \times Y_1), \\ \mathcal{R}^\varepsilon \text{ converge à deux échelles vers } \mathcal{R} \text{ indépendant de } x_3 \text{ dans } (L^2(\Omega \times Y))^{100} \end{cases} \tag{7}$$

On fait aussi l'hypothèse de coercivité des tenseurs $(\mathcal{R}^\varepsilon_{ijkl})$ et (c^ε_{ij}), qui implique celle de $\mathcal{R}^\varepsilon$. Enfin, on suppose les tenseurs $\mathcal{R}^\varepsilon$ et $\mathcal{R}$ dans L^∞ pour donner un sens aux équations.

2.4. *Modèle effectif*

Les hypothèses précédentes assurent l'existence et l'unicité de $\boldsymbol{U}^b$ pour $b > 0$ fixé, et l'estimation a priori

$$\|\boldsymbol{M}^a(\boldsymbol{U}^b)\|_{(L^2(\Omega))^7 \times L^2(\Omega_1^\varepsilon)^3} \le C \quad \forall b > 0 \tag{8}$$

Celle-ci implique l'existence d'une sous-suite de $(\boldsymbol{M}^a(\boldsymbol{U}^b))$ convergeant à deux échelles dans $(L^2(\Omega \times Y))^7 \times (L^2(\Omega \times Y_1))^3$ vers une limite $\boldsymbol{M} := ((K_{\alpha\beta})_{\alpha\beta=1,2}, (K_{i3})_{i=1\ldots3}, (L_i)_{i=1\ldots3})$. Le premier point, qui est aussi mathématiquement le plus délicat, est de caractériser $\boldsymbol{M}$. Posons $S_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) = (\partial_{y_\alpha}v_\beta + \partial_{y_\beta}v_\alpha)/2$, $y = {}^t(y_1, y_2) \in Y$, et

$$V_{KL} = \{\boldsymbol{v} = {}^t(\bar{v}_1 - x_3\,\partial_1 v_3, \bar{v}_2 - x_3\,\partial_2 v_3, v_3)\,;\, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in H^1(\omega), v_3 \in H^2(\omega), \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \Gamma\},$$

$$V^1_{KL} = \{\boldsymbol{v}^1 = {}^t(\bar{v}^1_1 - x_3\,\partial_{y_1}v^2_3, \bar{v}^1_2 - x_3\,\partial_{y_2}v^2_3, 0)\,;\, \bar{v}^1_1, \bar{v}^1_2 \in L^2(\omega\,;H^1_\#(Y)), v^2_3 \in L^2(\omega\,;H^2_\#(Y))\}.$$

LEMME 1. — *Il existe* $\boldsymbol{u} \in V_{KL}$ *tel que* $(\boldsymbol{u}^b)$ *converge faiblement vers* $\boldsymbol{u}$ *dans* $(H^1(\Omega))^3$. *Il existe* $\boldsymbol{u}^1 \in V^1_{KL}$ *tel que* $K_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) + S_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}^1)$, $\alpha, \beta = 1, 2$. *De plus* $L_1 = L_2 = 0$.

Notons à présent $\mathbb{M}$ l'ensemble des éléments de $(L^2(\Omega \times Y))^7 \times (L^2(\Omega \times Y_1))^3$ de la forme $((s_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) + S_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}^1))_{\alpha\beta = 1,2}, (K_{i3})_{i = 1...3}, \mathbf{0}_2, L_3)$ avec $\boldsymbol{v} \in V_{KL}$ et $\boldsymbol{v}^1 \in V^1_{KL}$. Par un choix approprié de fonctions test, des arguments de densité et un lemme technique développés dans [2], on montre :

LEMME 2. — *La limite* $\boldsymbol{M}$ *définie précédemment est l'unique solution dans* $\mathbb{M}$ *de*

$$\int_{\Omega \times Y} {}^t\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\mathcal{R}}\boldsymbol{M}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + 2\,G \int_{\Omega \times Y_1} \boldsymbol{\mathcal{M}}(L_3)\, \tilde{L}_3\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\Omega \times Y_1} h\tilde{L}_3\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \quad \forall \tilde{\boldsymbol{M}} \in \mathbb{M} \tag{9}$$

En particulier, toutes les suites convergent et il n'est plus nécessaire d'extraire de sous-suite.

L'étape suivante est l'élimination des composantes (K_{i3}, L_3), soit de $\Pi\boldsymbol{M}$ où Π est la projection de $(L^2(\Omega \times Y))^7 \times (L^2(\Omega \times Y_1))^3$ sur le sous-espace des éléments de la forme $(\mathbf{0}_4, (K_{i3})_{i = 1...3}, \mathbf{0}_2, L_3)$. Suivant la démarche classique de théorie des plaques, on les calcule en fonction de $\boldsymbol{M}^0 = \boldsymbol{M} - \Pi\boldsymbol{M}$. Soit $\boldsymbol{\mathcal{N}} = id - \boldsymbol{\mathcal{M}}$. On distingue, comme classiquement en théorie des plaques, $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}^0)$ qui regroupe les termes en $\bar{v}$ et $\bar{v}^1$, et $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{M}^0)$ qui regroupe les termes en v^3 et v^2_3, qui se découplent du fait de l'indépendance de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ par rapport à x_3. Notons enfin Π_1 la projection de $(L^2(\Omega \times Y))^7 \times (L^2(\Omega \times Y_1))^3$ sur $(\mathbf{0}_9, L_3)$, et

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\mathcal{N}}} = -(\Pi\boldsymbol{\mathcal{R}}\Pi)^{-1}\,\Pi\boldsymbol{\mathcal{R}},\ \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}} = -(\Pi\boldsymbol{\mathcal{R}}\Pi + 2\,G\Pi_1)^{-1}\,\Pi\boldsymbol{\mathcal{R}},\ \boldsymbol{\mathcal{H}} = (\Pi\boldsymbol{\mathcal{R}}\Pi + 2\,G\Pi_1)^{-1}\,{}^t(\mathbf{0}_9, h) \tag{10}$$

LEMME 3. — $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\Pi\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}\,\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}^0) + \boldsymbol{\mathcal{H}}$, $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\Pi\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\mathcal{N}}}\,\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{M}^0)$.

On élimine ensuite la variable locale ${}^t((\bar{u}^1_\alpha - x_3\,\partial_{y_\alpha} u^2_3)_{\alpha = 1,2}, 0)$ par les arguments classiques de l'homogénéisation linéaire :

LEMME 4. — *Il existe* $(\boldsymbol{u}^{\alpha\beta}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}})_{\alpha\beta = 1,2} \in (H^1_\#(Y))^8$, $(u^{\alpha\beta}_{\boldsymbol{\mathcal{N}}3})_{\alpha\beta = 1,2} \in (H^2_\#(Y))^4$, $\boldsymbol{u}^3_{\boldsymbol{\mathcal{M}}} \in (H^1_\#(Y))^2$, *tels que* ${}^t(u^1_1, u^1_2) = \boldsymbol{u}^{\alpha\beta}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}\, s_{\alpha\beta}(u) + \boldsymbol{u}^3_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}\, h$, $u^2_3 = u^{\alpha\beta}_{\boldsymbol{\mathcal{N}}3}\, \partial^2_{\alpha\beta} u_3$.

Faute de place, on n'explicite pas ces opérateurs. Les formules, faciles à obtenir, sont données dans [2] formules (32) et (34).

Nous sommes à présent à même de donner le modèle de plaque effectif.

THÉORÈME 1. — $\boldsymbol{u} = {}^t(\bar{u}_1 - x_3\,\partial_1 u_3, \bar{u}_2 - x_3\,\partial_2 u_3, u_3) \in V_{KL}$ *est l'unique solution de*

$$\int_\omega (s_{\alpha\beta}(\bar{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{\mathcal{R}}^H_{\boldsymbol{\mathcal{M}}\alpha\beta\gamma\delta}\, s_{\gamma\delta}(\bar{\boldsymbol{u}}) + \partial^2_{\alpha\beta} v_3 \boldsymbol{\mathcal{R}}^H_{\boldsymbol{\mathcal{N}}\alpha\beta\gamma\delta}\, \partial^2_{\gamma\delta} u_3)\, \mathrm{d}\hat{x} = \int_\omega s_{\alpha\beta}(\bar{\boldsymbol{v}})\, \mathrm{d}^H_{\boldsymbol{\mathcal{M}}\alpha\beta}\, h\, \mathrm{d}\hat{x} \quad \forall \boldsymbol{v} \in V_{KL} \tag{11}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{R}}^H_{\boldsymbol{\mathcal{N}}\gamma\delta\rho\xi} &= \frac{1}{3}\int_Y (\delta_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \partial^2_{y_\alpha y_\beta} u^{\gamma\delta}_{\boldsymbol{\mathcal{N}}3})\, \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{\mathcal{N}}\alpha\beta\lambda\mu}(\delta_{\lambda\mu,\rho\xi} + \partial^2_{y_\lambda y_\mu} u^{\rho\xi}_{\boldsymbol{\mathcal{N}}3})\, \mathrm{d}y, \\
d^H_{\boldsymbol{\mathcal{M}}3\gamma\delta} &= \int_Y (\delta_{\alpha\beta,\gamma\delta} + S_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}^{\gamma\delta}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}))\, \boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathrm{Mix}}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}\alpha\beta\lambda\mu}\, S_{\lambda\mu}(\boldsymbol{u}^3_{\boldsymbol{\mathcal{M}}})\, \mathrm{d}y, \\
\boldsymbol{\mathcal{R}}^H_{\boldsymbol{\mathcal{M}}\gamma\delta\rho\xi} &= \int_Y (\delta_{\alpha\beta,\gamma\delta} + S_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}^{\gamma\delta}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}))\, \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}\alpha\beta\lambda\mu}(\delta_{\lambda\mu,\rho\xi} + S_{\lambda\mu}(\boldsymbol{u}^{\rho\xi}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}))\, \mathrm{d}y
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Remarque 1. — La complexité des formules (10) et (12) justifie le formalisme utilisé systématiquement dans [1, 2], et occasionellement dans cette note, à base de notations et de produits tensoriels, d'opérations algébriques simples comme les projections. Il permet de mener à bien des calculs complexes. Des formules complètement explicitées occuperaient beaucoup de place. Il se prête aussi bien à l'utilisation d'un logiciel de calcul formel pour l'explicitation complète de ces formules. On renvoie à [2] section 2.4.2 pour une illustration de ce propos : les formules donnant les coefficients effectifs ont été complètement développées, sur un exemple simple, à l'aide du logiciel de calcul formel Mathematika. Ce formalisme se prête bien aussi à la modélisation d'empilements de plaques, comme montré dans [1] section 3.4, ce qui semble important en vue d'obtenir des structures contrôlables.

3. Modèle avec circuits électriques non locaux

Par rapport au modèle précédent, les faces supérieures des inclusions piézoélectriques sont en plus reliées à chacune des faces voisines par d'autres circuits électriques, d'admittance $G_1/a\varepsilon^2$. En prenant pour simplifier φ_m^b identique sur toutes les inclusions, cela se traduit à partir de la loi de Kirchhoff en remplaçant l'expression donnée pour $< \boldsymbol{D}^b \cdot \boldsymbol{n} >$ dans (1) par :

$$< \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} > = \sum_{l=1}^{2} \frac{G_1}{a\varepsilon^2} \left(\varphi^b_{T^l_{-1}(M)} - 2\, \varphi^b_M + \varphi^b_{T^l_{+1}(M)} \right) - \frac{G}{a}\, \varphi^b_M + h^b \qquad (13)$$

pour chaque inclusion M, où $T^l_{-1}(M)$, $T^l_{+1}(M)$, $l = 1, 2$ désignent les quatre voisins de M s'ils existent. Les inclusions au bord de la plaque ne sont pas reliées à l'extérieur. La condition (13) correspond clairement à une formule de Laplacien discret (ici avec conditions aux limites de Neumann) dans les deux directions x_1, x_2 de la plaque. Deux cellules étant distantes de ε avec le *scaling* $G_1/a\varepsilon^2$ choisi pour l'admittance, ce terme va tout naturellement conduire, lors du passage à la limite, à un terme supplémentaire dans l'équation effective, sous la forme d'un Laplacien dans ces deux directions, portant sur la composante transverse du champ électrique. Plus précisément, la composante $L_3^0 = \mathcal{M}(L_3)$ ne pouvant plus s'éliminer, comme dans le lemme 3 du modèle précédent, on aboutit à :

THÉORÈME 2. — $(\boldsymbol{u}, L_3^0) = ({}^t(\bar{u}_1 - x_3\, \partial_1 u_3, \bar{u}_2 - x_3\, \partial_1 u_2, u_3), L_3^0) \in V_{KL} \times H^1(\omega)$ *est l'unique solution de*

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_\omega (s_{\alpha\beta}(\bar{v}), \tilde{L}_3) \begin{pmatrix} \mathcal{R}^H_{\mathcal{M}\alpha\beta\gamma\delta} & d^H_{\mathcal{M}3\alpha\beta} \\ e^H_{\mathcal{M}3\gamma\delta} & c^H_{\mathcal{M}33} + 2\,|Y_1|\,G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{\gamma\delta}(\bar{u}) \\ L_3^0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\hat{x} \\ & + \int_\omega [\partial^2_{\alpha\beta} v_3\, \mathcal{R}^H_{\mathcal{N}\alpha\beta\gamma\delta}\, \partial^2_{\gamma\delta} u_3 + 2|Y_1|\, G_1\, \partial_\alpha \tilde{L}_3\, \partial_\alpha L_3^0]\, \mathrm{d}\hat{x} = \int_\omega \tilde{L}_3 h\, \mathrm{d}\hat{x} \end{aligned} \right. \qquad (14)$$

$\forall (\boldsymbol{v}, \tilde{L}_3) \in V_{KL} \times H^1(\omega)$. *Le tenseur* $(\mathcal{R}^H_{\mathcal{N}\alpha\beta\gamma\delta})$ *est celui défini en (12). La définition des tenseurs* $(\mathcal{R}^H_{\mathcal{M}\alpha\beta\gamma\delta})$, $(d^H_{\mathcal{M}3\alpha\beta})$, $(e^H_{\mathcal{M}3\alpha\beta})$, $(c^H_{\mathcal{M}33})$ *est similaire (voir [2], formule (36)).*

Remarque 2. — Il est intéressant de noter que l'on peut choisir la forme de l'opérateur portant sur L_3^0 en choisissant convenablement le type de circuits et le type de connexions entre les faces supérieures des inclusions, et les conditions limites associées, en fixant les connexions éventuelles avec l'extérieur de la plaque.

Références bibliographiques

[1] Canon É., Lenczner M., Models of elastic plates with piezoelectric inclusions, part I: Models without homogenization, Math. Comput. Model. 26 (N5) (1997) 79–106.
[2] Canon É., Lenczner M., Models of elastic plates with piezoelectric inclusions, part II: Models with homogenization (soumis).
[3] Zemanian A.H., Transfinite graphs and electrical networks, Trans. Am. Math. Soc. 334 (1992) 1–36.
[4] Allaire G., Homogenization and two scale-convergence, SIAM J. Math. Anal. 23 (N26) (1992) 1482–1518.
[5] Nguentseng G., A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal. 20 (N3) (1989) 608–623.
[6] Ciarlet P.-G., Plates and junctions in elastic multi-structures, série RMA, numéro 14, Masson, Paris, 1990.
[7] Caillerie D., Thin elastic and periodic plates, Math. Method App. Sci. 6 (1984) 159–191.