CNP - Master 2 - TP

1 Séance 1 : affectation des étudiants en projet

On considère le problème suivant : il y a n groupes d'étudiants (peu importe ici le nombre d'étudiants par groupe) que l'on numérote de 1 à n. On dispose aussi de m sujets de projets que l'on numérote de 1 à m. Pour chaque groupe d'étudiants i, on dispose d'une liste de cinq projets $p_{i,1}, \ldots, p_{i,5}$ classés par ordre de préférence des projets qu'ils préfèrent traiter durant l'année. On fait aussi les hypothèses suivantes :

- Les cinq projets de chaque liste sont distincts deux à deux, c'est-à-dire que pour tout i, si $j \neq k$, $p_{i,j} \neq p_{i,k}$.
- Il y a plus de projets que de groupes : $m \geq n$.

Par exemple, si l'on prend $n = 4$ et $m = 6$ on peut avoir :
$p_{1,1} = 1$, $p_{1,2} = 2$, $p_{1,3} = 3$, $p_{1,4} = 4$ et $p_{1,5} = 5$,
$p_{2,1} = 1$, $p_{2,2} = 2$, $p_{2,3} = 6$, $p_{2,4} = 4$ et $p_{2,5} = 3$,
$p_{3,1} = 1$, $p_{3,2} = 2$, $p_{3,3} = 4$, $p_{3,4} = 6$ et $p_{3,5} = 5$,
$p_{4,1} = 2$, $p_{4,2} = 4$, $p_{4,3} = 6$, $p_{4,4} = 3$ et $p_{4,5} = 1$.
Ce qui signifie, par exemple, que le groupe 4 (dernière ligne), a classé dans l'ordre les projets $2, 4, 6, 3$ et 1. On pourra aussi noter cela par la matrice à n lignes et 5 colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

On souhaite affecter un sujet de projet à chaque groupe d'étudiants de telle sorte que deux groupes d'étudiants différents n'aient pas le même sujet de projet. Le projet affecté à un groupe d'étudiants doit nécessairement être un des cinq projets qu'il a classés.

1. Donner un petit exemple de cas dans lequel il n'y a aucune affectation possible. Donner deux exemples d'affectations possibles pour l'exemple ci-dessus.
2. Décrire un algorithme qui teste s'il y a au moins une affectation possible et si tel est le cas en retourne une. Évaluer grossièrement la complexité de cet algorithme (on ne demande pas de l'implémenter).
3. On cherche à faire mieux, c'est-à-dire à trouver une manière optimale d'affecter les projet afin de contenter au mieux les étudiants. On estime le mécontentement d'un groupe d'étudiants par un entier qui est l'indice du sujet obtenu dans la liste (un groupe ayant son choix numéro 1 aura donc un mécontentement de 1, et son choix numéro 5 un mécontentement de 5). Pour une affectation donnée, le mécontentement du groupe i est noté a_i. On considère les fonctions d'objectif suivantes afin d'effectuer la recherche d'affectations :
   - minimiser $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$,
   - minimiser $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$,
   - minimiser le cardinal de $\{i \mid a_i \geq 3\}$,
   - minimiser $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.

   Pour chacune de ces fonctions, exprimer en français du mieux possible ce qu'elle signifie. Expliquer aussi informellement les différences entre elles. Sont-elles équivalentes ?
4. On décide maintenant d'utiliser la première fonction d'optimisation, c'est-à-dire de minimiser la somme des a_i. Écrire un programme dans le langage de votre choix retournant une affectation optimale.

2 Séance 2 : approche par programmation linéaire

On va étudier une approche par programme linéaire pour résoudre le problème vu précédemment.

On propose d'utiliser $n \times m$ variables $X_{i,j}$ pour coder une affectation telles que $X_{i,j} = 1$ si le projet j est affecté au groupe i, 0 sinon.

1. Justifier que pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, on doit avoir

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_{i,j} \leq 1. \tag{1}$$

2. Justifier que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on doit avoir

$$\sum_{j \in \{p_{i,1}, \cdots, p_{i,5}\}} X_{i,j} = 1. \tag{2}$$

3. Justifier que si on a les m équations (1) et les n équations (3) qui sont vérifiées, alors les variables $X_{i,j}$ codent bien une affectation.
4. Pour tout i, j, on pose $\alpha_{i,j} = 0$ si $j \notin \{p_{i,1}, \ldots, p_{i,5}\}$ et $\alpha_{i,j} = k$ si $j = p_{i,k}$. L'entier $\alpha_{i,j}$, lorsqu'il est non nul, est donc le rang de classement du projet j par le groupe i. Justifier que sous hypothèses (1) et (3), la fonction d'objectif consiste à minimiser

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} \alpha_{i,j} X_{i,j}. \tag{3}$$

5. Justifier par un algorithme que l'on peut calculer efficacement les $\alpha_{,j}$ à partir de la matrice P.
6. On se propose de résoudre le problème à l'aide du logiciel `lp_solve` qui s'exécute simplement par la commande
`lp_solve fichier.lp`
où `fichier.lp` est de la forme

```
min: x1+3*x2+x3+4*x4;
x1 <= 3;
x2 <= 4;
x3 <= 5;
x4 <= 3;
x1 >=0;
x2 >=0;
x3 >=0;
x4 >=0;
x1+3*x2 <= 5;
x2+5*x1 >=2;
x3+x4 >= 6;
3x2+x4>=5;
int x1,x2,x3,x4;
```

La dernière ligne indique que les variables doivent être entières. On obtient la réponse :

```
Value of objective function: 16
Actual values of the variables:
x1                              1
x2                              1
x3                              4
x4                              2
```

Écrire une fonction dans le langage de votre choix qui à partir d'une matrice P et d'entier n et m retourne le fichier pour `lp_solve` correspondant au programme linéaire proposé. Comparer l'efficacité avec le programme de la session 1.