SVAM – Réseaux de Petri

Pierre-Cyrille Héam

pheam [at] femto-st.fr

Master 2 Informatique

Modélisation des systèmes concurrents et communicants

- De nombreux systèmes sont composés de plusieurs sous-systèmes qui interagissent,
- On souhaite modéliser la concurrence/communication à partir des modèles des sous-systèmes sans *exploser* le modèles total.

Il existe plusieurs approches :

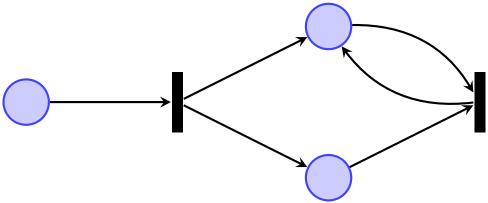
- Réseaux de Petri,
- Automates communicants,
- Algèbres de processus,
- ...

Plan

Graphe de Réseau de Petri

Définition informelle

Un graphe de réseau de Petri est un graphe orienté dans lequel l'ensemble des sommets est partagé en deux sous-ensembles distincts, les places et les transitions, de telle sorte que les arcs ne vont ni d'une place à l'autre, ni d'une transition à l'autre.

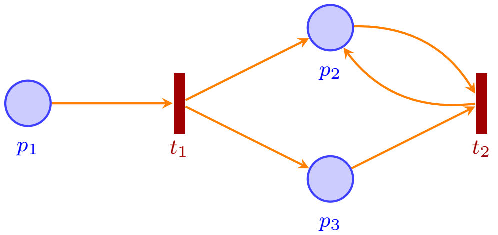


Graphe de Réseau de Petri

Définition formelle

Un graphe de réseau de Petri un un triplet (P, T, F) où

- P est un ensemble fini de *places*, $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- T est un ensemble fini de *transitions*, $T = \{t_1, t_2, \}$
- $F \subseteq P \times T \cup T \times P$ est l'ensemble des *arcs*,
  $F = \{(p_1, t_1), (t_1, p_2), (t_1, p_3), (p_2, t_2), (p_3, t_2), (t_3, p2)\}$
- $P \cap T = \emptyset$.



Marquages – Réseaux de Petri

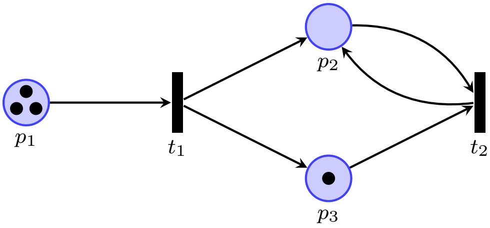
Définition

Un marquage M d'un graphe de réseau de Petri (P, T, F) est une application de T dans $\mathbb{N}$: à chaque place on associe un entier.

Informellement, $M(p)$ désigne le nombre de jetons dans la place p.

$$M(p_1) = 3$$
$$M(p_2) = 0$$
$$M(p_3) = 1$$

On notera $M = (3, 0, 1)$



Définition

Un réseau de Petri est une tuple (P, T, F, M_0) où (P, T, F) est une graphe de réseau de Petri et M_0 un marquage de ce graphe. Le marquage M_0 est appelé marquage initial.

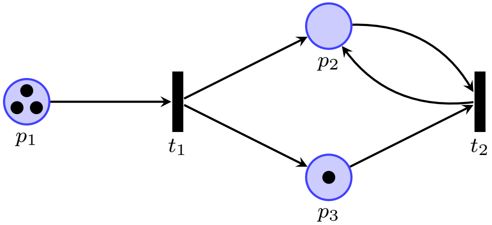
Sémantique – Execution

Informellement

Faire évoluer un réseau de Petri, c'est activer (*fire*) des transitions pour faire évoluer le marquage. Pour une transition t :

- On enlève un jeton dans chaque place précédant t.
- On ajoute un jeton dans chaque place suivant t.

$M(p_1) = 3$
$M(p_2) = 0$
$M(p_1) = 1$



M

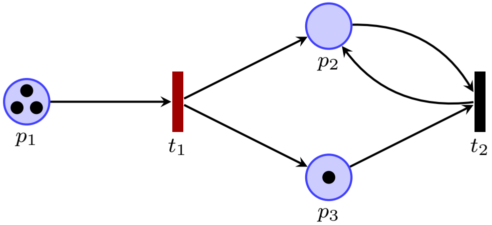
Sémantique – Execution

Informellement

Faire évoluer un réseau de Petri, c'est activer (*fire*) des transitions pour faire évoluer le marquage. Pour une transition t :

- On enlève un jeton dans chaque place précédant t.
- On ajoute un jeton dans chaque place suivant t.

$M(p_1) = 3$
$M(p_2) = 0$
$M(p_1) = 1$



M

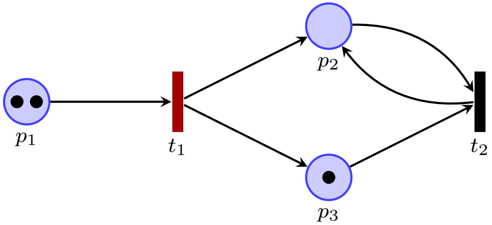
Sémantique – Execution

Informellement

Faire évoluer un réseau de Petri, c'est activer (*fire*) des transitions pour faire évoluer le marquage. Pour une transition t :

- On enlève un jeton dans chaque place précédant t.
- On ajoute un jeton dans chaque place suivant t.

$M(p_1) = 3$
$M(p_2) = 0$
$M(p_1) = 1$



M

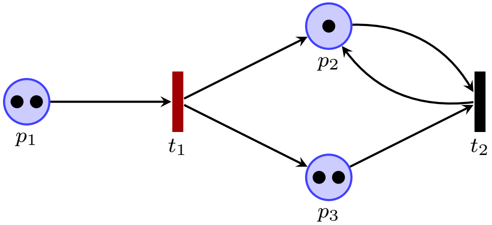
Sémantique – Execution

Informellement

Faire évoluer un réseau de Petri, c'est activer (*fire*) des transitions pour faire évoluer le marquage. Pour une transition t :

- On enlève un jeton dans chaque place précédant t.
- On ajoute un jeton dans chaque place suivant t.

$$\begin{array}{ll} M(p_1) = 3 & M'(p_1) = 2 \\ M(p_2) = 0 & M'(p_2) = 1 \\ M(p_1) = 1 & M'(p_1) = 2 \end{array}$$



$$M \longrightarrow M'$$

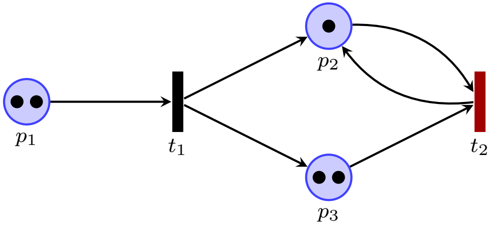
Sémantique – Execution

Informellement

Faire évoluer un réseau de Petri, c'est activer (*fire*) des transitions pour faire évoluer le marquage. Pour une transition t :

- On enlève un jeton dans chaque place précédant t.
- On ajoute un jeton dans chaque place suivant t.

$$\begin{array}{ll} M(p_1) = 3 & M'(p_1) = 2 \\ M(p_2) = 0 & M'(p_2) = 1 \\ M(p_1) = 1 & M'(p_1) = 2 \end{array}$$



$$M \longrightarrow M'$$

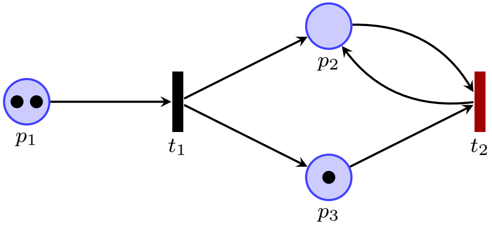
Sémantique – Execution

Informellement

Faire évoluer un réseau de Petri, c'est activer (*fire*) des transitions pour faire évoluer le marquage. Pour une transition t :

- On enlève un jeton dans chaque place précédant t.
- On ajoute un jeton dans chaque place suivant t.

$M(p_1) = 3$	$M'(p_1) = 2$	$M''(p_1) = 2$
$M(p_2) = 0$	$M'(p_2) = 1$	$M''(p_2) = 1$
$M(p_1) = 1$	$M'(p_1) = 2$	$M''(p_1) = 1$



$$M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \ldots$$

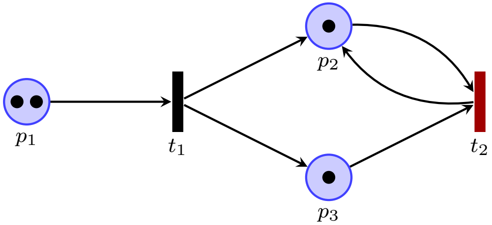
Sémantique – Execution

Informellement

Faire évoluer un réseau de Petri, c'est activer (*fire*) des transitions pour faire évoluer le marquage. Pour une transition t :

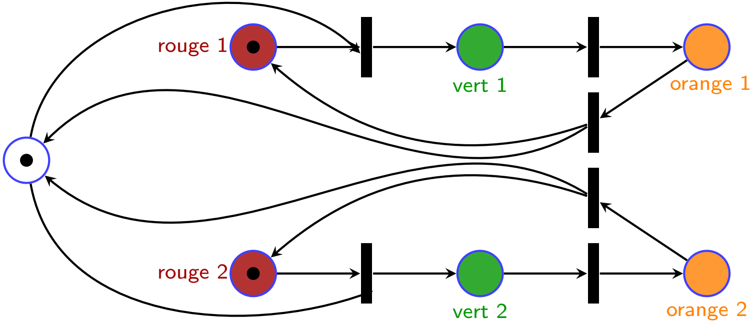
- On enlève un jeton dans chaque place précédant t.
- On ajoute un jeton dans chaque place suivant t.

$$\begin{array}{lll} M(p_1) = 3 & M'(p_1) = 2 & M''(p_1) = 2 \\ M(p_2) = 0 & M'(p_2) = 1 & M''(p_2) = 1 \\ M(p_1) = 1 & M'(p_1) = 2 & M''(p_1) = 1 \end{array}$$



$$M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \ldots$$

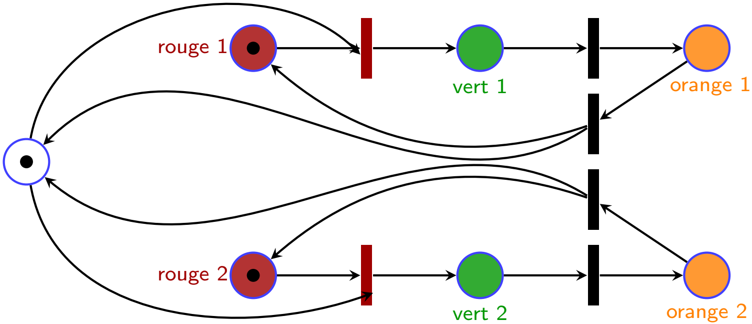
Exemple, le feu tricolore



$$(-, \text{rouge } 1, \text{vert } 1, \text{orange } 1, \text{rouge } 2, \text{vert } 2, \text{orange } 2)$$

$$(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

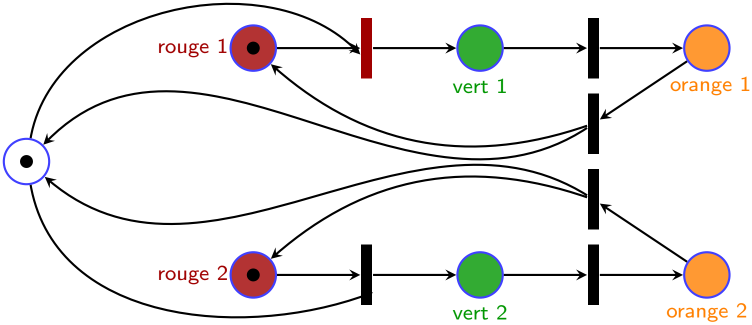
Exemple, le feu tricolore



$$(-, \text{rouge } 1, \text{vert } 1, \text{orange } 1, \text{rouge } 2, \text{vert } 2, \text{orange } 2)$$

$$(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

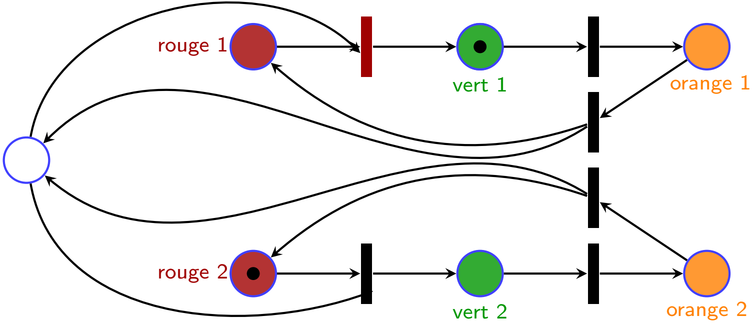
Exemple, le feu tricolore



$$(-, \text{rouge } 1, \text{vert } 1, \text{orange } 1, \text{rouge } 2, \text{vert } 2, \text{orange } 2)$$

$$(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

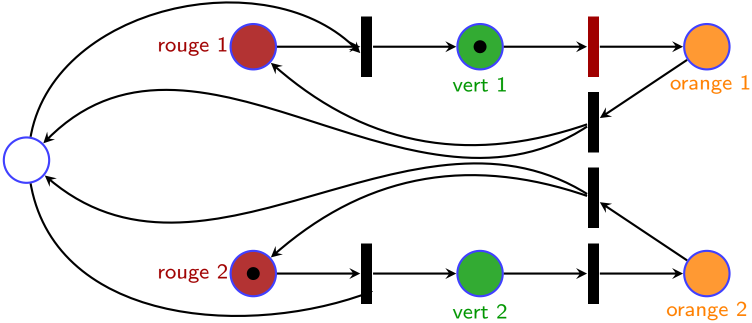
Exemple, le feu tricolore



$$(-, \text{rouge } 1, \text{vert } 1, \text{orange } 1, \text{rouge } 2, \text{vert } 2, \text{orange } 2)$$

$$(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$$

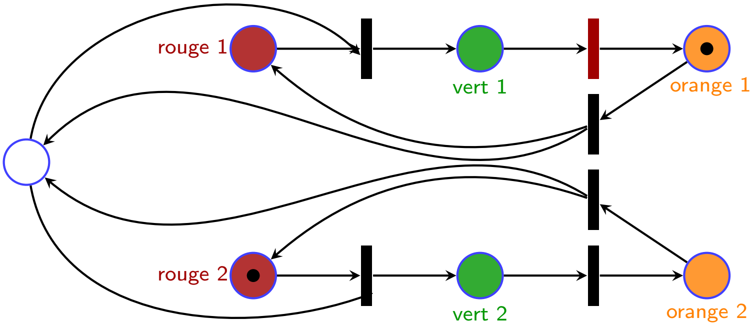
Exemple, le feu tricolore



$$(-, \text{rouge } 1, \text{vert } 1, \text{orange } 1, \text{rouge } 2, \text{vert } 2, \text{orange } 2)$$

$$(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$$

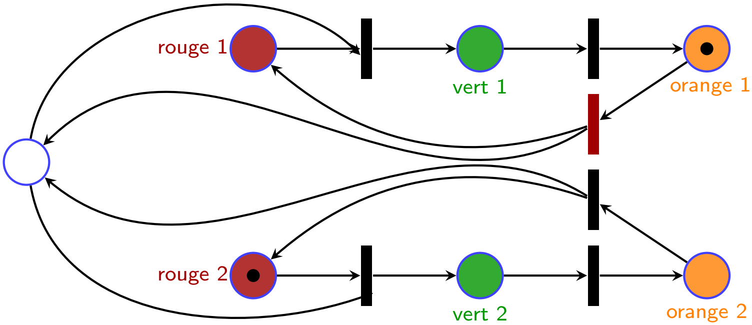
Exemple, le feu tricolore



$$(-, \text{rouge } 1, \text{vert } 1, \text{orange } 1, \text{rouge } 2, \text{vert } 2, \text{orange } 2)$$

$$(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$$

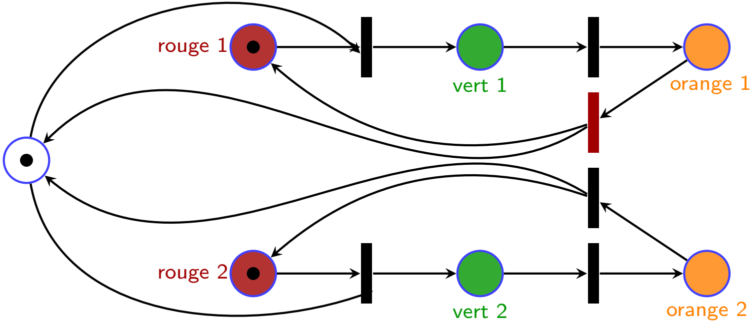
Exemple, le feu tricolore



$$(-, \text{rouge } 1, \text{vert } 1, \text{orange } 1, \text{rouge } 2, \text{vert } 2, \text{orange } 2)$$

$$(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$$

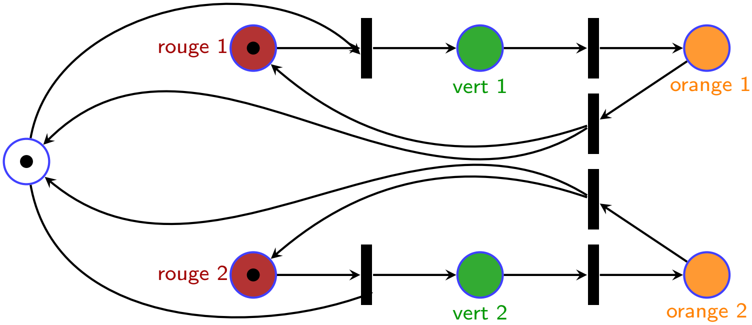
Exemple, le feu tricolore



$$(-, \text{rouge } 1, \text{vert } 1, \text{orange } 1, \text{rouge } 2, \text{vert } 2, \text{orange } 2)$$

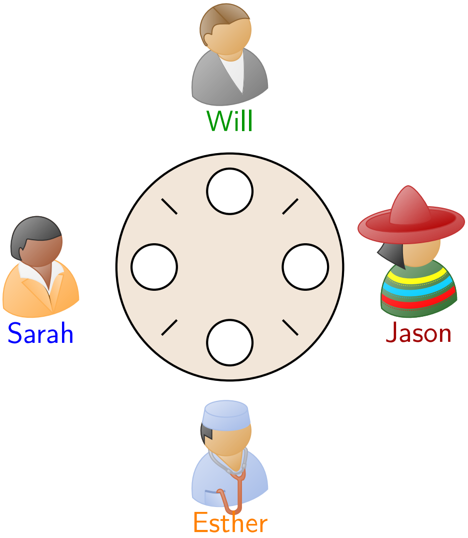
$$(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

Exemple, le feu tricolore

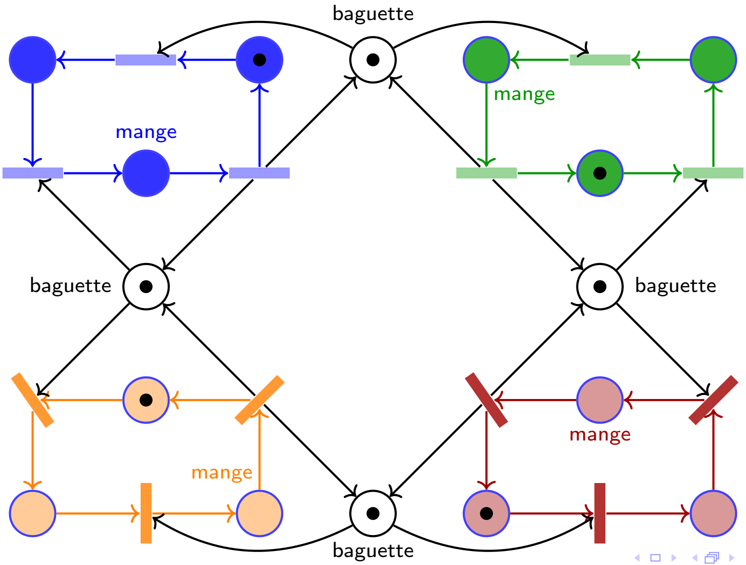


$$(-, \text{rouge } 1, \text{vert } 1, \text{orange } 1, \text{rouge } 2, \text{vert } 2, \text{orange } 2)$$
$$(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

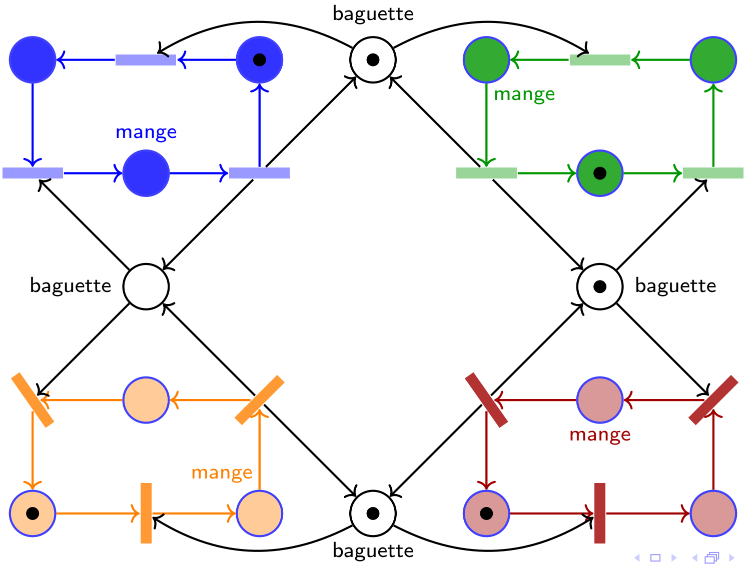
Philosophes



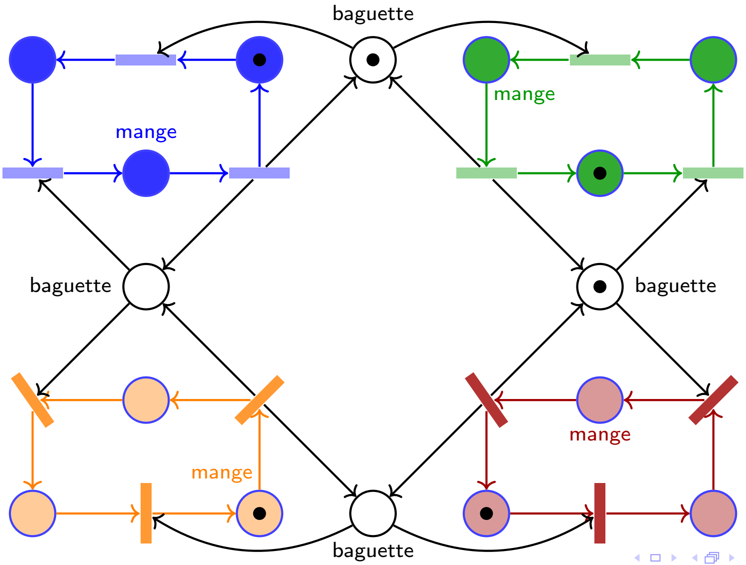
Philosophes



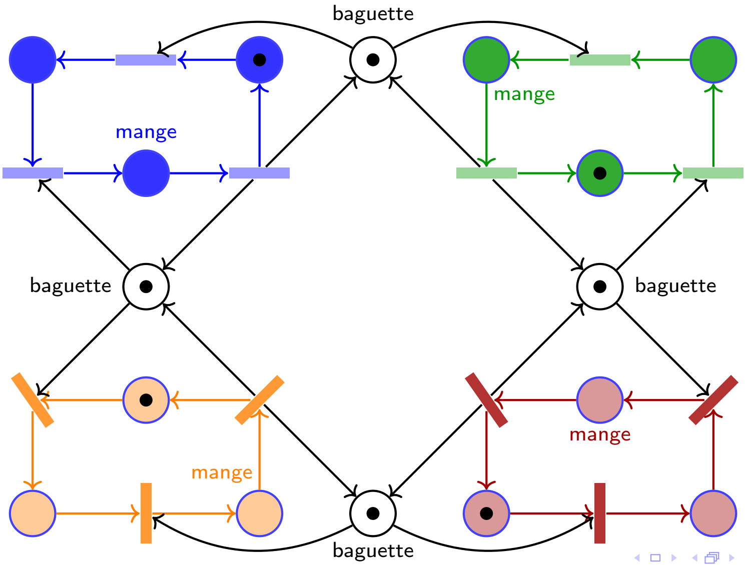
Philosophes



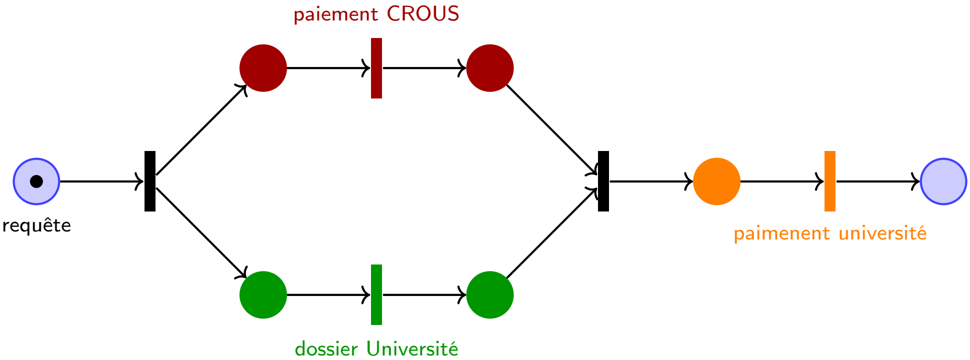
Philosophes



Philosophes



Exemple, inscription université

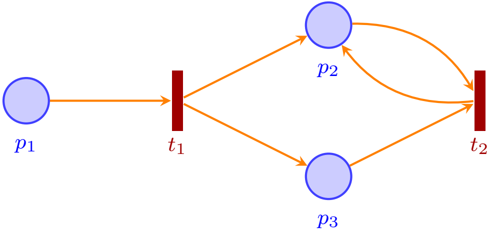


Plan

Notations

Soit (P, T, F, M) un réseau de Petri.

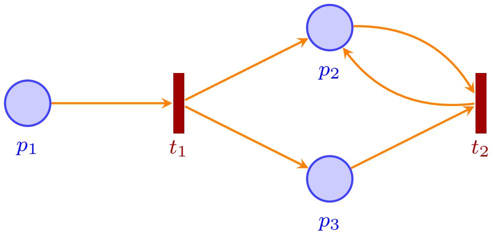
- pour toute place p, ${}^\bullet p = \{t \in T \mid (t,p) \in F\}$ ${}^\bullet p_1 = \emptyset$ ${}^\bullet p_2 = \{t_1, t_2\}$.
- pour toute place p, $p^\bullet = \{t \in T \mid (p,t) \in F\}$ $p_1^\bullet = \{t_1\}$ $p_2^\bullet = \{t_2\}$.
- pour toute transition t, ${}^\bullet t = \{p \in P \mid (p,t) \in F\}$ ${}^\bullet t_1 = \{p_1\}$ ${}^\bullet t_2 = \{p_2, p_3\}$.
- pour toute transition t, $t^\bullet = \{p \in P \mid (t,p) \in F\}$ $t_1^\bullet = \{p_2, p_3\}$ $t_2^\bullet = \{p_2\}$.



Notations

Soit (P, T, F, M) un réseau de Petri.

- pour toute place p, ${}^\bullet p = \{t \in T \mid (t,p) \in F\}$ ${}^\bullet p_1 = \emptyset$ ${}^\bullet p_2 = \{t_1, t_2\}$.
- pour toute place p, $p^\bullet = \{t \in T \mid (p,t) \in F\}$ $p_1^\bullet = \{t_1\}$ $p_2^\bullet = \{t_2\}$.
- pour toute transition t, ${}^\bullet t = \{p \in P \mid (p,t) \in F\}$ ${}^\bullet t_1 = \{p_1\}$ ${}^\bullet t_2 = \{p_2, p_3\}$.
- pour toute transition t, $t^\bullet = \{p \in P \mid (t,p) \in F\}$ $t_1^\bullet = \{p_2, p_3\}$ $t_2^\bullet = \{p_2\}$.



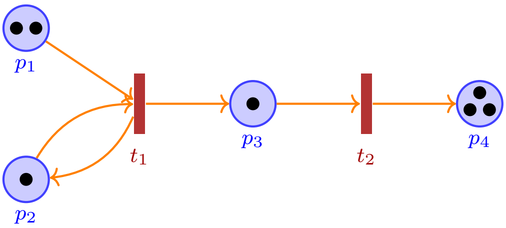
Cela s'étend aux ensembles : $({}^\bullet p_3)^\bullet = \{t_1\}^\bullet = \{p_2, p_3\}$ et ${}^\bullet(t_1{}^\bullet) = {}^\bullet\{p_2, p_3\} = \{t_1, t_2\}$

Marquages consécutifs

Définition

Pour un réseau de Petri, deux marquages M_1 et M_2 sont dits t-consécutifs, où t est une transition, noté $M_1 \xrightarrow{t} M_2$, si

- Pour tout $p \in {}^\bullet t$, $M_1(p) > 0$, et
- Si $p \in {}^\bullet t$ et $p \notin t^\bullet$, alors $M_2(p) = M_1(p) - 1$,
- Si $p \in t^\bullet$ et $p \notin {}^\bullet t$, alors $M_2(p) = M_1(p) + 1$,
- $M_2(p) = M_1(p)$ sinon.



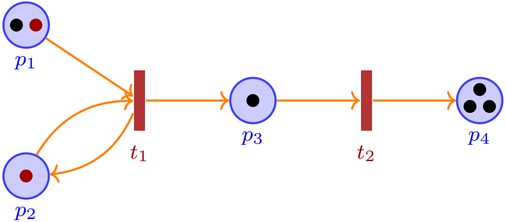
$(2, 1, 1, 1, 3)$

Marquages consécutifs

Définition

Pour un réseau de Petri, deux marquages M_1 et M_2 sont dits t-consécutifs, où t est une transition, noté $M_1 \xrightarrow{t} M_2$, si

- Pour tout $p \in {}^\bullet t$, $M_1(p) > 0$, et
- Si $p \in {}^\bullet t$ et $p \notin t^\bullet$, alors $M_2(p) = M_1(p) - 1$,
- Si $p \in t^\bullet$ et $p \notin {}^\bullet t$, alors $M_2(p) = M_1(p) + 1$,
- $M_2(p) = M_1(p)$ sinon.



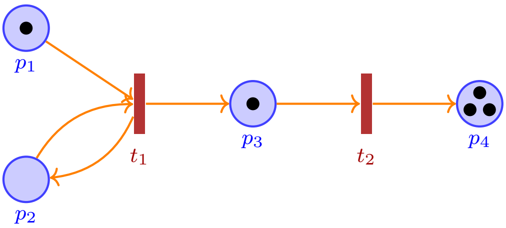
$(2, 1, 1, 1, 3) \xrightarrow{t_1}$

Marquages consécutifs

Définition

Pour un réseau de Petri, deux marquages M_1 et M_2 sont dits t-consécutifs, où t est une transition, noté $M_1 \xrightarrow{t} M_2$, si

- Pour tout $p \in {}^\bullet t$, $M_1(p) > 0$, et
- Si $p \in {}^\bullet t$ et $p \notin t^\bullet$, alors $M_2(p) = M_1(p) - 1$,
- Si $p \in t^\bullet$ et $p \notin {}^\bullet t$, alors $M_2(p) = M_1(p) + 1$,
- $M_2(p) = M_1(p)$ sinon.



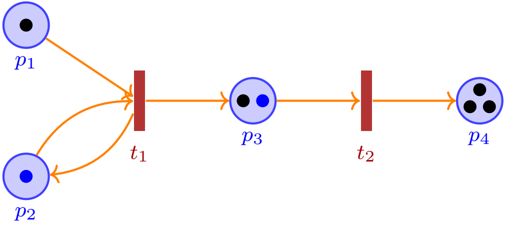
$(2, 1, 1, 1, 3) \xrightarrow{t_1}$

Marquages consécutifs

Définition

Pour un réseau de Petri, deux marquages M_1 et M_2 sont dits t-consécutifs, où t est une transition, noté $M_1 \xrightarrow{t} M_2$, si

- Pour tout $p \in {}^\bullet t$, $M_1(p) > 0$, et
- Si $p \in {}^\bullet t$ et $p \notin t^\bullet$, alors $M_2(p) = M_1(p) - 1$,
- Si $p \in t^\bullet$ et $p \notin {}^\bullet t$, alors $M_2(p) = M_1(p) + 1$,
- $M_2(p) = M_1(p)$ sinon.



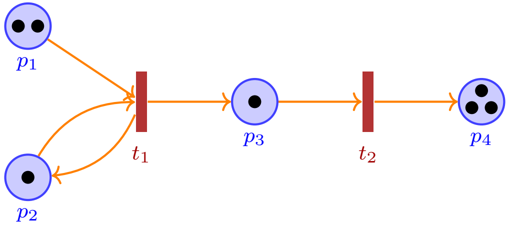
$(2, 1, 1, 1, 3) \xrightarrow{t_1} (1, 1, 2, 3)$

Marquages accessibles

Définition

Etant donné un réseau de Petri (P, T, F, M_0), on note dit qu'un marquage M est **accessible**, si $M = M_0$ ou s'il existe des transitions t_1, t_2, $\dots t_n$ et des marquages M_1, M_2, $\dots M_n$ tels que

- $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_n} M_n$
- $M_n = M$



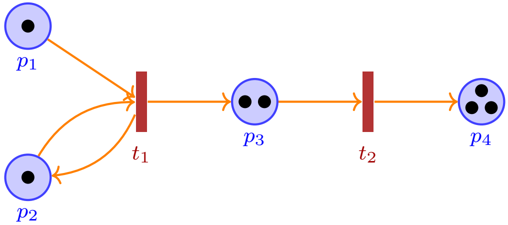
$(2, 1, 1, 1, 3)$

Marquages accessibles

Définition

Etant donné un réseau de Petri (P, T, F, M_0), on note dit qu'un marquage M est **accessible**, si $M = M_0$ ou s'il existe des transitions t_1, t_2, $\ldots t_n$ et des marquages M_1, M_2, $\ldots M_n$ tels que

- $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \ldots \xrightarrow{t_n} M_n$
- $M_n = M$



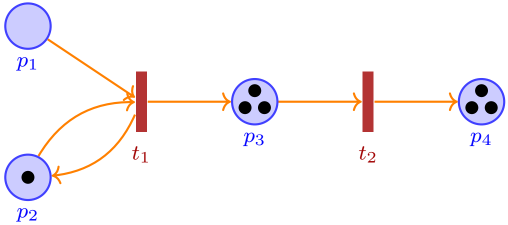
$(2, 1, 1, 1, 3) \xrightarrow{t_1} (1, 1, 2, 3)$

Marquages accessibles

Définition

Etant donné un réseau de Petri (P, T, F, M_0), on note dit qu'un marquage M est **accessible**, si $M = M_0$ ou s'il existe des transitions t_1, t_2, $\ldots t_n$ et des marquages M_1, M_2, $\ldots M_n$ tels que

- $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \ldots \xrightarrow{t_n} M_n$
- $M_n = M$



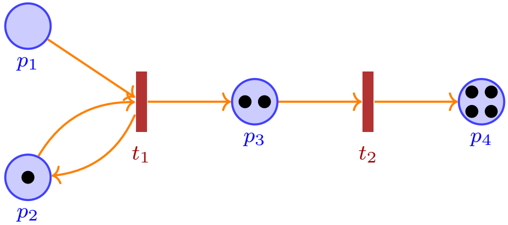
$$(2, 1, 1, 1, 3) \xrightarrow{t_1} (1, 1, 2, 3) \xrightarrow{t_1} (0, 1, 3, 3)$$

Marquages accessibles

Définition

Etant donné un réseau de Petri (P, T, F, M_0), on note dit qu'un marquage M est **accessible**, si $M = M_0$ ou s'il existe des transitions t_1, t_2, $\ldots t_n$ et des marquages M_1, M_2, $\ldots M_n$ tels que

- $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \ldots \xrightarrow{t_n} M_n$
- $M_n = M$



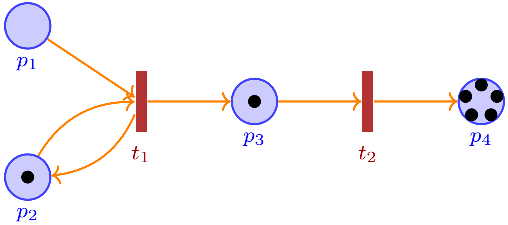
$$(2, 1, 1, 1, 3) \xrightarrow{t_1} (1, 1, 2, 3) \xrightarrow{t_1} (0, 1, 3, 3) \xrightarrow{t_2} (0, 1, 2, 4)$$

Marquages accessibles

Définition

Etant donné un réseau de Petri (P, T, F, M_0), on note dit qu'un marquage M est **accessible**, si $M = M_0$ ou s'il existe des transitions t_1, t_2, $\ldots t_n$ et des marquages M_1, M_2, $\ldots M_n$ tels que

- $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \ldots \xrightarrow{t_n} M_n$
- $M_n = M$



$$(2, 1, 1, 1, 3) \xrightarrow{t_1} (1, 1, 2, 3) \xrightarrow{t_1} (0, 1, 3, 3) \xrightarrow{t_2} (0, 1, 2, 4) \xrightarrow{t_2} (0, 1, 1, 5)$$

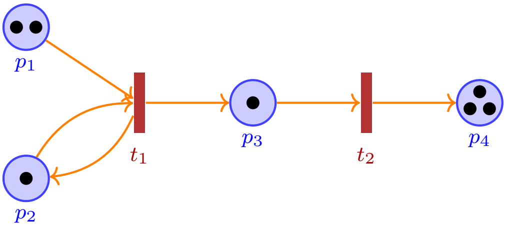
Graphe d'accessibilité

Définition

Etant donné un réseau de Petri (P, T, F, M_0), on appelle **Graphe d'accessibilité** du réseau, le graphe orienté étiqueté (Q, Δ), où

- Q est l'ensemble des marquage accessibles,
- $\Delta \subseteq Q \times T \times Q$, est défini par

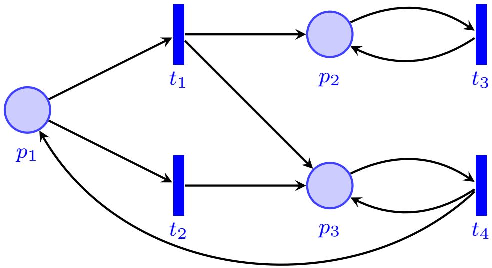
$$\Delta = \{(M_1, t, M_2) \mid M_1 \xrightarrow{t} M_2\}$$



$$\begin{tikzcd}
(2,1,1,3) \arrow[r, "t_2"'] \arrow[d, "t_1"] & (2,1,0,4) \arrow[d, "t_1"] & & \\
(1,1,2,3) \arrow[r, "t_2"] \arrow[d, "t_1"] & (1,1,1,4) \arrow[r, "t_2"] \arrow[d, "t_1"] & (1,1,0,5) \arrow[d, "t_1"] & \\
(0,1,3,3) \arrow[r, "t_2"] & (0,1,2,4) \arrow[r, "t_2"] & (0,1,1,5) \arrow[r, "t_2"] & (0,1,0,6)
\end{tikzcd}$$

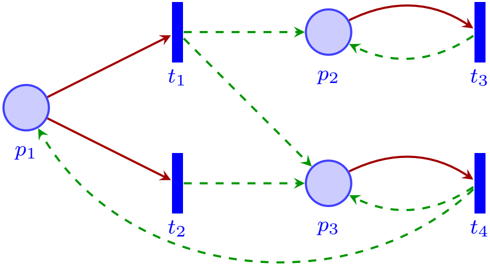
Matrices d'incidence

Les matrices d'incidence W, W^+ et W^- dépendent uniquement du graphe du réseau de Petri.



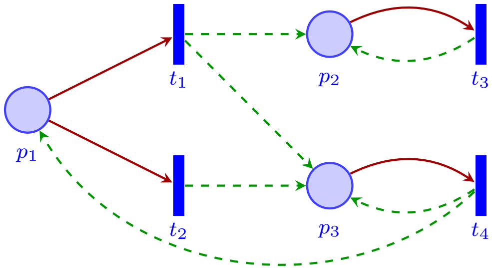
Matrices d'incidence

Les matrices d'incidence W, W^+ et W^- dépendent uniquement du graphe du réseau de Petri.



Matrices d'incidence

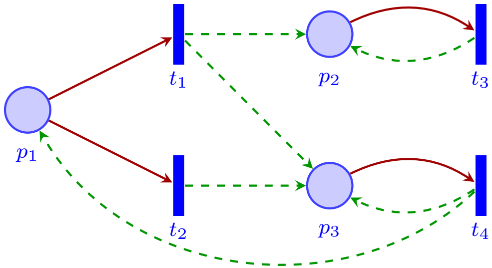
Les matrices d'incidence W, W^+ et W^- dépendent uniquement du graphe du réseau de Petri.



$$W^- = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices d'incidence

Les matrices d'incidence W, W^+ et W^- dépendent uniquement du graphe du réseau de Petri.

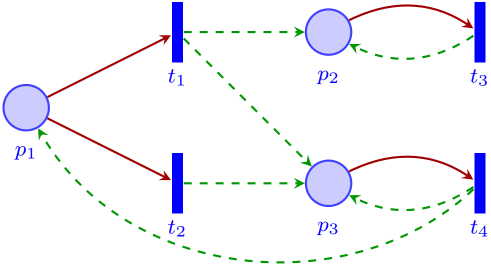


$$W^- = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices d'incidence

Les matrices d'incidence W, W^+ et W^- dépendent uniquement du graphe du réseau de Petri.

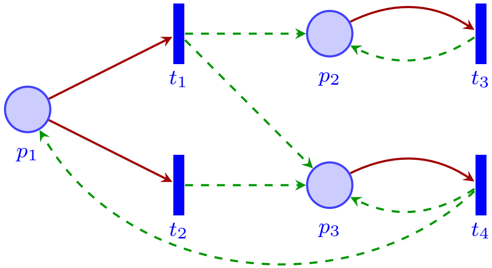


$$W^- = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = W^+ - W^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

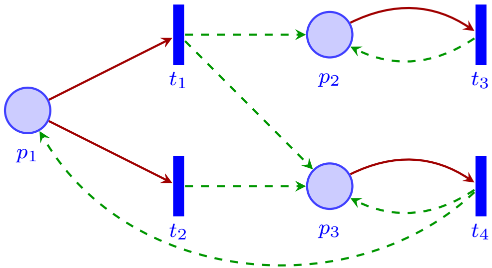
Lien avec l'accessibilité



$$W = W^+ - W^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_3} M'$$

Lien avec l'accessibilité

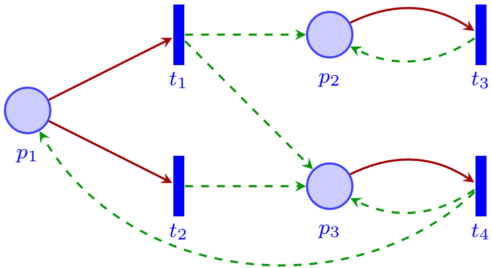


$$W = W^+ - W^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_3} M'$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2, 2, 1, 0)$$

Lien avec l'accessibilité

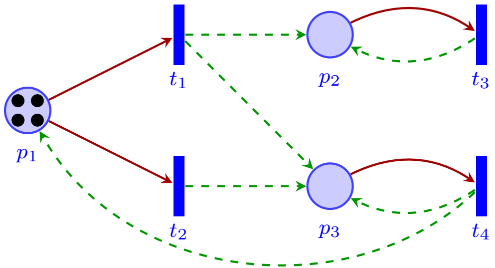


$$W = W^+ - W^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_3} M'$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2,2,1,0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lien avec l'accessibilité

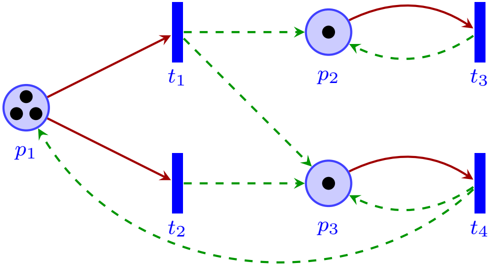


$$W = W^+ - W^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_3} M'$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2,2,1,0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lien avec l'accessibilité

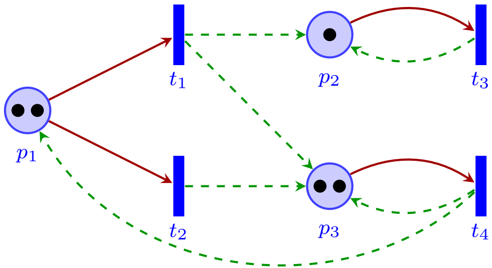


$$W = W^+ - W^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_3} M'$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2,2,1,0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lien avec l'accessibilité

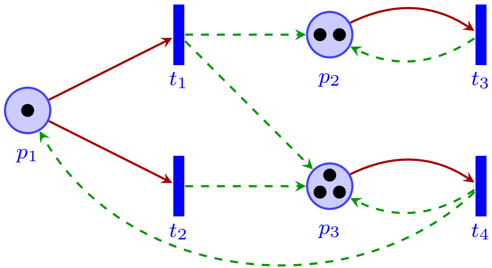


$$W = W^+ - W^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_3} M'$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2, 2, 1, 0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lien avec l'accessibilité

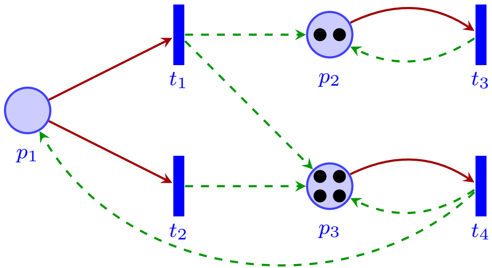


$$W = W^+ - W^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_1} \rightarrow_{t_2} \rightarrow_{t_3} M'$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2,2,1,0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lien avec l'accessibilité

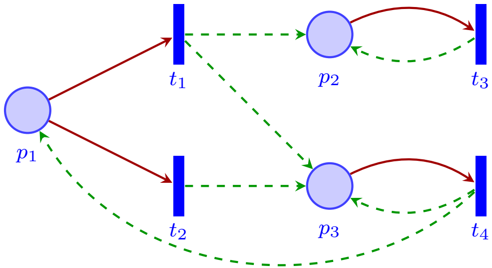


$$W = W^+ - W^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \to_{t_1} \to_{t_2} \to_{t_1} \to_{t_2} \to_{t_3} M'$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2,2,1,0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lien avec l'accessibilité



$$W = W^{+} - W^{-} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les marquages accessibles sont tous de la forme

$$M_0 + W\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\,,\ \ \alpha_i \in \mathbb{N},$$

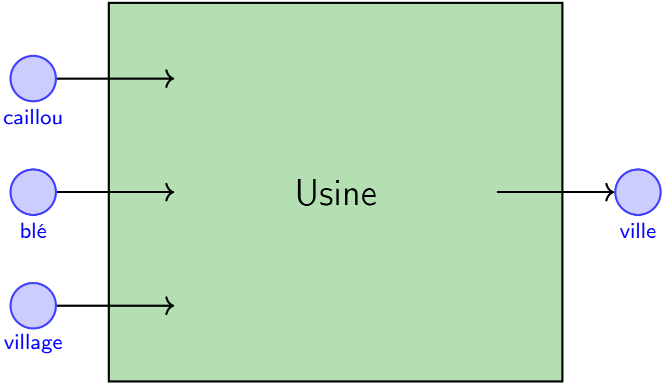
mais la réciproque n'est en général par vraie.

Graphe d'accessibilité

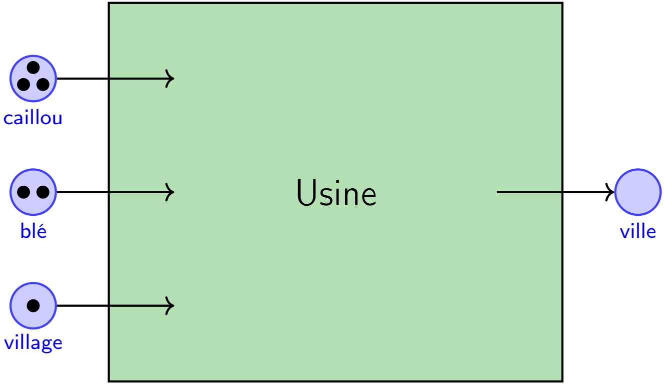
Reprendre le dîner des philosophes pour propriéte de chemin

Plan

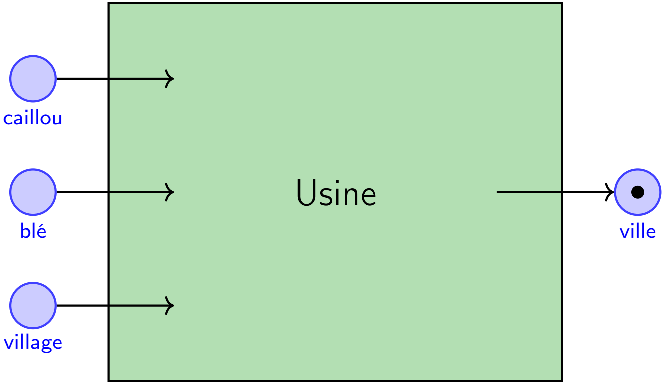
Exemple introductif



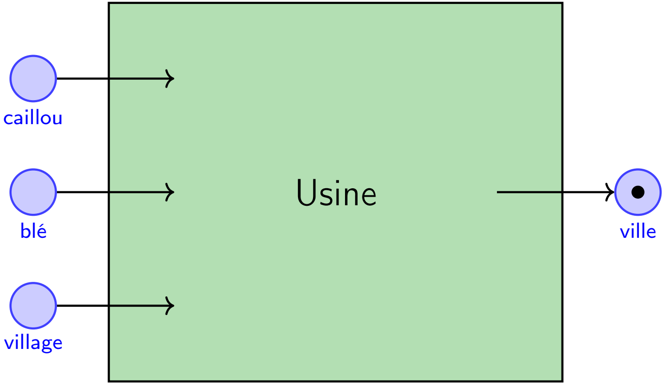
Exemple introductif



Exemple introductif

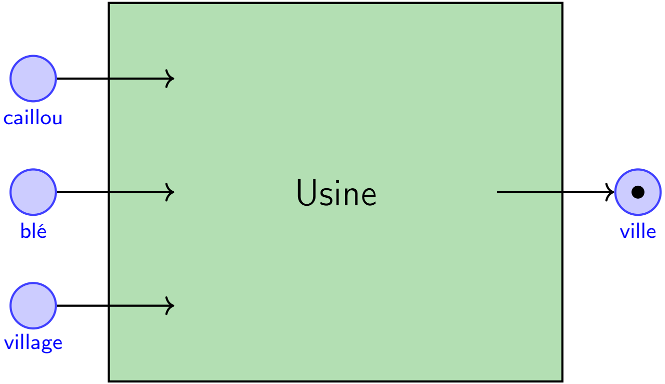


Exemple introductif



- Accessibilité : $(3, 2, 1, 0, \ldots, 0) \rightarrow^* (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$

Exemple introductif



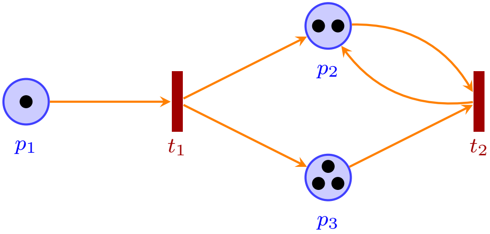
- Accessibilité : $(3,2,1,0,\ldots,0) \rightarrow^* (0,0,0,0,\ldots,0,1)$
- Couverture : $(3,2,1,0,\ldots,0) \rightarrow^* (x,x,x,x,\ldots,x,1)$

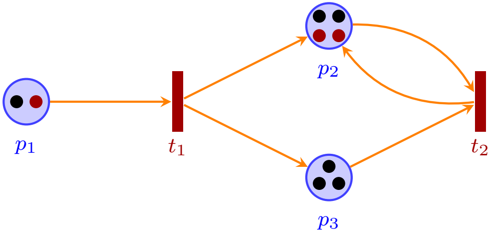
Définition

Définition

Dans une réseau de Petri, un marquage M couvre un marquage M', noté $M' \leq M$, si pour toute place p,

$$M'(p) \leq M(p).$$



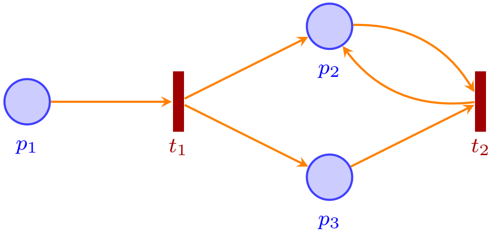


$$M' = (1, 2, 3) \qquad M = (1+1, 2+2, 3) = (2, 4, 3)$$

Algorithme de Karp-Miller : ω-marquages

Définition

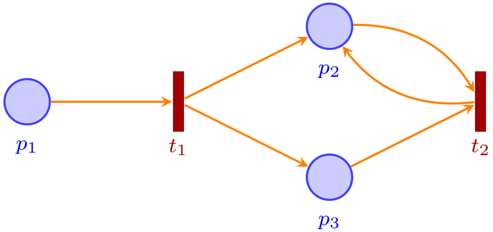
Un $\omega-$marquage d'un graphe de réseau de Petri (P, T, F) est une application de P dans $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$.



Algorithme de Karp-Miller : ω-marquages

Définition

Un $\omega-$marquage d'un graphe de réseau de Petri (P, T, F) est une application de P dans $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$.



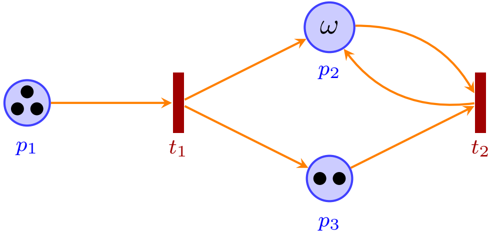
$M(p_1) = 3$
$M(p_2) = \omega$
$M(p_3) = 2$

$(3, \omega, 2)$

Algorithme de Karp-Miller : ω-marquages

Définition

Un ω−marquage d'un graphe de réseau de Petri (P, T, F) est une application de P dans $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$.



$M(p_1) = 3$
$M(p_2) = \omega$
$M(p_3) = 2$

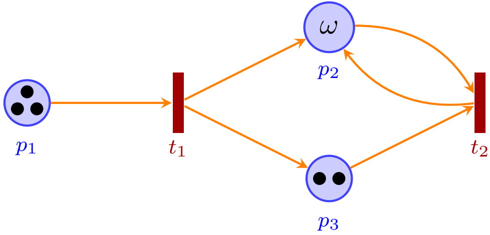
$(3, \omega, 2)$

ω : infini, *autant qu'on veut*, *open bar*

Algorithme de Karp-Miller : ω-marquages

Définition

Un $\omega-$marquage d'un graphe de réseau de Petri (P, T, F) est une application de P dans $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$.



$M(p_1) = 3$
$M(p_2) = \omega$
$M(p_3) = 2$

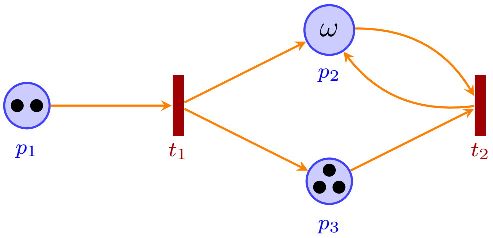
$(3, \omega, 2)$

ω : infini, *autant qu'on veut*, *open bar* $\quad (3, \omega, 2) \rightarrow_{t_1}$

Algorithme de Karp-Miller : ω-marquages

Définition

Un $\omega-$marquage d'un graphe de réseau de Petri (P, T, F) est une application de P dans $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$.



$M(p_1) = 3$
$M(p_2) = \omega$
$M(p_3) = 2$

$(3, \omega, 2)$

ω : infini, *autant qu'on veut*, *open bar* $\quad (3, \omega, 2) \rightarrow_{t_1} (2, \omega, 3)$

Algorithme de Karp-Miller : marquages dominants

Définition

Un ω-marquage M_1 d'un graphe de réseau de Petri (P, T, F) **domine** un ω-marquage M_2 (différent de M_1), noté $M_1 \ggg M_2$ si

- M_1 est accessible à partir de M_2
- M_1 couvre M_2 (avec la convention $\omega \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$).

$$M_2 = (3,2,0,1) \xrightarrow{t_1} (2,2,1,0) \xrightarrow{t_2} (1,3,1,1) \xrightarrow{t_3} (2,2,2,2) \xrightarrow{t_4} M_1 = (3,2,1,3)$$

Algorithme de Karp-Miller : marquages dominants

Définition

Un ω-marquage M_1 d'un graphe de réseau de Petri (P, T, F) domine un ω-marquage M_2 (différent de M_1), noté $M_1 \ggg M_2$ si

- M_1 est accessible à partir de M_2
- M_1 couvre M_2 (avec la convention $\omega \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$).

$$M_2 = (3,2,0,1) \xrightarrow{t_1} (2,2,1,0) \xrightarrow{t_2} (1,3,1,1) \xrightarrow{t_3} (2,2,2,2) \xrightarrow{t_4} M_1 = (3,2,1,3) \xrightarrow{t_1 t_2 t_3 t_4} (3,2,2+1,3+2)$$

Algorithme de Karp-Miller : marquages dominants

Définition

Un ω-marquage M_1 d'un graphe de réseau de Petri (P, T, F) domine un ω-marquage M_2 (différent de M_1), noté $M_1 \ggg M_2$ si

- M_1 est accessible à partir de M_2
- M_1 couvre M_2 (avec la convention $\omega \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$).

$$M_2 = (3,2,0,1) \xrightarrow{t_1} (2,2,1,0) \xrightarrow{t_2} (1,3,1,1) \xrightarrow{t_3} (2,2,2,2) \xrightarrow{t_4} M_1 = (3,2,1,3) \xrightarrow{(t_1t_2t_3t_4)^\omega} (3,2,\omega,\omega)$$

Algorithme de Karp-Miller : marquages dominants

Soient M_1 et M_2 deux ω-marquages tels que $M_1 \ggg M_2$.

On note $M_1^{[M_2]}$ le marquage défini par

Algorithme de Karp-Miller : marquages dominants

Soient M_1 et M_2 deux ω-marquages tels que $M_1 \ggg M_2$.

On note $M_1^{[M_2]}$ le marquage défini par

- Si $M_1(p) = M_2(p)$, alors $M_1^{[M_2]}(p) = M_1(p)$

$$(1, 3, 5, 2, 2)^{[(1,2,4,2,1)]} = (1, \quad , \quad , 2, \quad)$$

Algorithme de Karp-Miller : marquages dominants

Soient M_1 et M_2 deux ω-marquages tels que $M_1 \ggg M_2$.

On note $M_1^{[M_2]}$ le marquage défini par

- Si $M_1(p) = M_2(p)$, alors $M_1^{[M_2]}(p) = M_1(p)$
- Si $M_1(p) > M_2(p)$, alors $M_1^{[M_2]}(p) = \omega$.

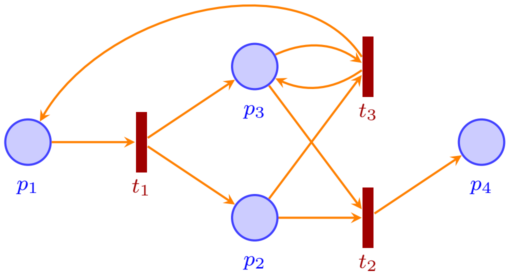
$$(1, 3, 5, 2, 2)^{[(1,2,4,2,1)]} = (1, \omega, \omega, 2, \omega)$$

Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute ${M_1}^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.

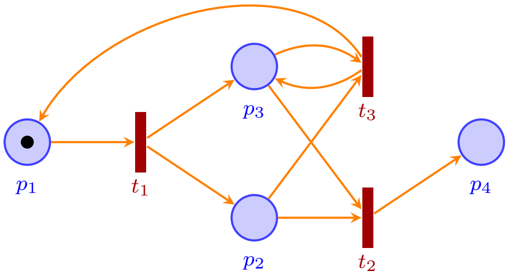


Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute $M_1{}^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



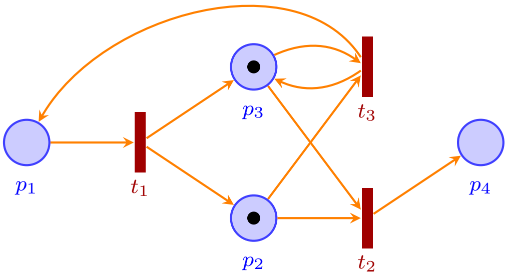
$(1, 0, 0, 0)$

Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute $M_1{}^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



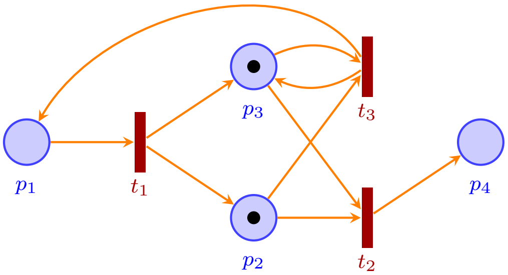
$$(1,0,0,0) \xrightarrow{t_1} (0,1,1,0)$$

Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute $M_1^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



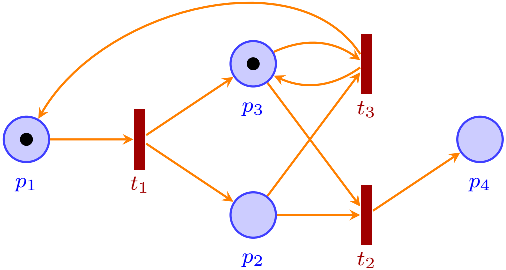
$$(1,0,0,0) \longrightarrow (0,1,1,0)$$

Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute $M_1{}^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



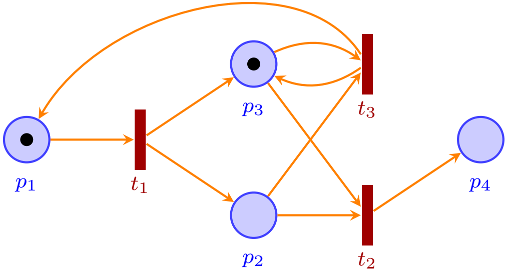
$$\begin{tikzcd} (1,0,0,0) \arrow[r] & (0,1,1,0) \arrow[d, "t_3"'] \\ & (1,0,1,0) \end{tikzcd}$$

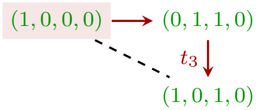
Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute $M_1{}^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



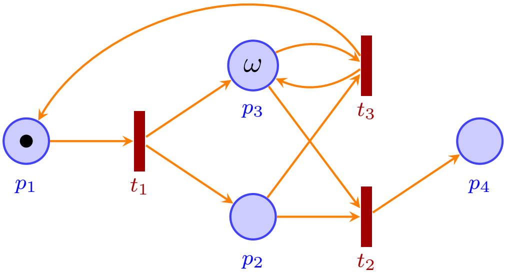


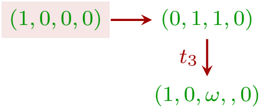
Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute ${M_1}^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



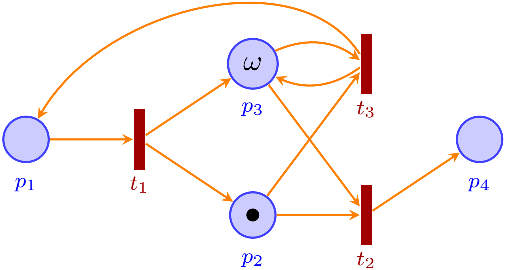


Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute $M_1^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



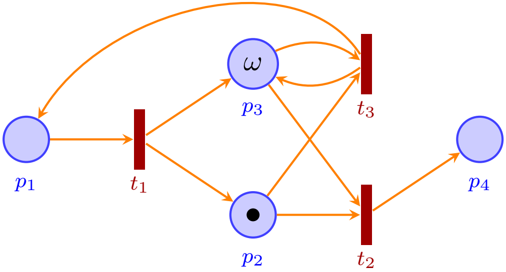
$$\begin{tikzcd}
\boxed{(1,0,0,0)} \arrow[r] & (0,1,1,0) \arrow[d, "t_3"'] \\
(0,1,\omega,0) & (1,0,\omega,,0) \arrow[l, "t_1"']
\end{tikzcd}$$

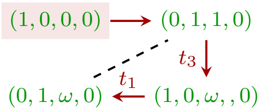
Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute $M_1^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



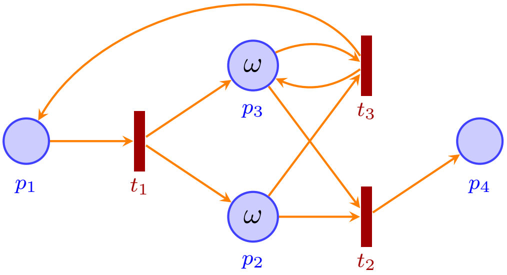


Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute ${M_1}^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



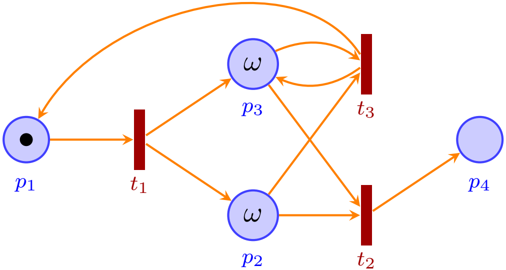
$$
\begin{tikzcd}
(1,0,0,0) \arrow[r] & (0,1,1,0) \arrow[d, "t_3"'] \\
(0,\omega,\omega,0) & (1,0,\omega,,0) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute $M_1{}^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



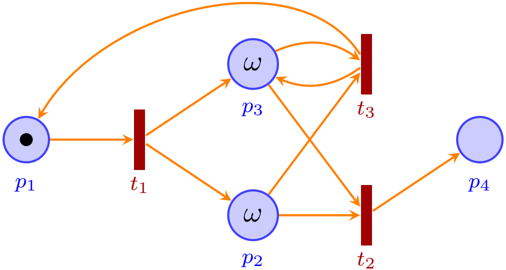
$$
\begin{array}{ccc}
(1,0,0,0) & \longrightarrow & (0,1,1,0) \\
 & & \downarrow t_3 \\
(0,\omega,\omega,0) & \longleftarrow & (1,0,\omega,,0) \\
\downarrow t_1 & & \\
(1,\omega,\omega,0) & &
\end{array}
$$

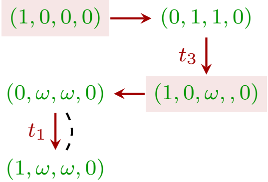
Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute $M_1{}^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



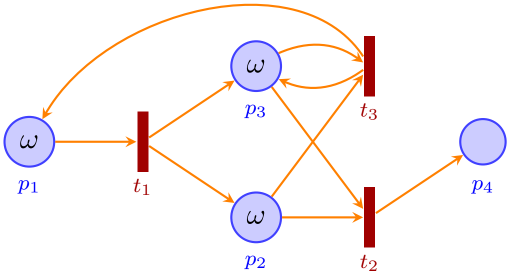


Arbre(s) de Miller et Karp

Modification de Graphe d'Accessibilité

Losque l'on veut ajouter M_1,

- s'il existe M_2 dans le graphe déjà construit tel que $M_1 \ggg M_2$, alors on ajoute $M_1{}^{[M_2]}$ à la place.
- si le sommet à ajouter M est dominé par un sommet M' présent, on ne l'ajoute pas.



$$
\begin{tikzcd}
\boxed{(1,0,0,0)} \arrow[r] & (0,1,1,0) \arrow[d, "t_3"'] \\
(0,\omega,\omega,0) \arrow[d, "t_1"'] & \boxed{(1,0,\omega,,0)} \arrow[l] \\
(\omega,\omega,\omega,0) &
\end{tikzcd}
$$

Algorithme de Miller et Karp

Terminaison et décider la couverture

Algorithme de Miller et Karp : exemple 1

Algorithme de Miller et Karp : exemple 2

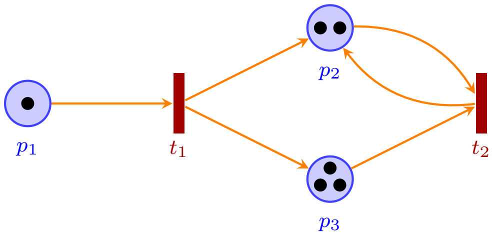
Ca ne donne pas le meme graphe.

Plan

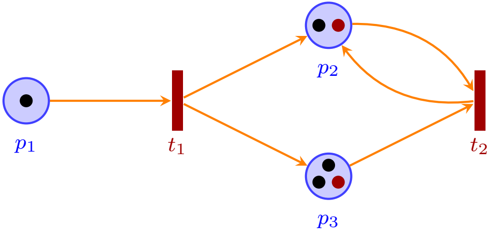
Conclusion

- Les réseaux de Petri sont très utilisés pour la modélisation et la simulation (voir TP) des systèmes concurrent,
- Il existe de très nombreuses variantes ou extensions :
  - probabilisés,
  - temporisés,
  - pondérés (voir prochains slides),
  - colorés,
  - avec priorités,
  - ...

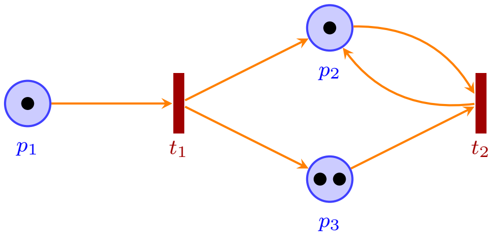
Réseaux pondérés



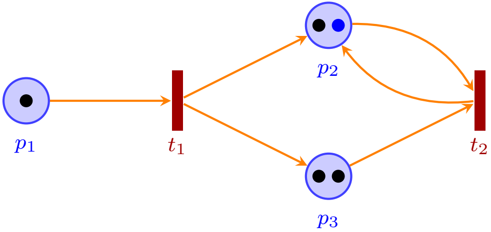
Réseaux pondérés



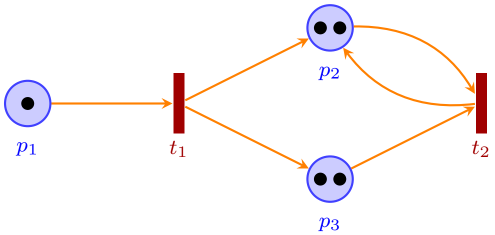
Réseaux pondérés



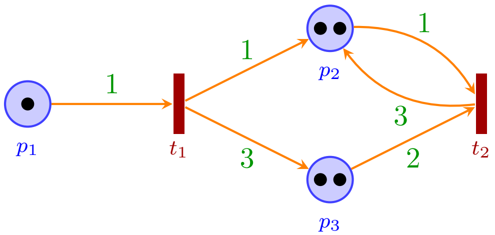
Réseaux pondérés



Réseaux pondérés

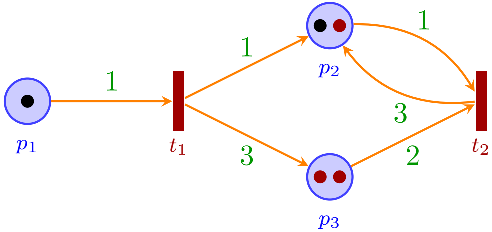


Réseaux pondérés



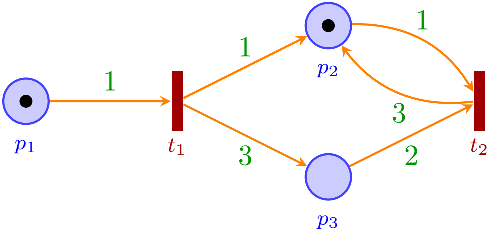
Pour les réseaux pondérés on ajoute des poids (entiers strictement positifs) sur chaque arc.

Réseaux pondérés



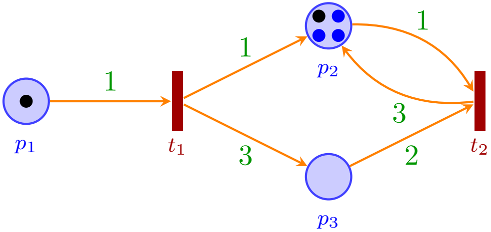
Pour les réseaux pondérés on ajoute des poids (entiers strictement positifs) sur chaque arc.

Réseaux pondérés



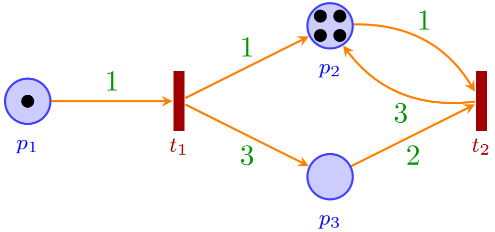
Pour les réseaux pondérés on ajoute des poids (entiers strictement positifs) sur chaque arc.

Réseaux pondérés



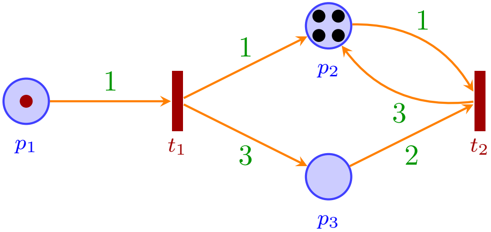
Pour les réseaux pondérés on ajoute des poids (entiers strictement positifs) sur chaque arc.

Réseaux pondérés



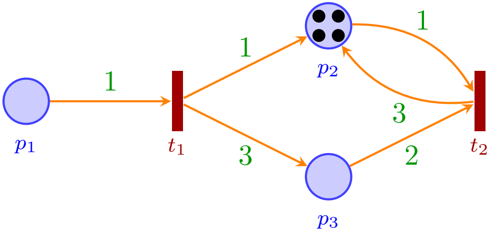
Pour les réseaux pondérés on ajoute des poids (entiers strictement positifs) sur chaque arc.

Réseaux pondérés



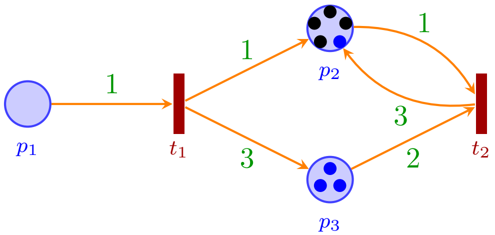
Pour les réseaux pondérés on ajoute des poids (entiers strictement positifs) sur chaque arc.

Réseaux pondérés



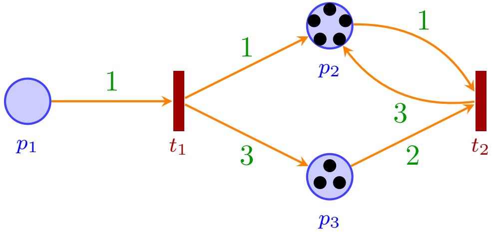
Pour les réseaux pondérés on ajoute des poids (entiers strictement positifs) sur chaque arc.

Réseaux pondérés



Pour les réseaux pondérés on ajoute des poids (entiers strictement positifs) sur chaque arc.

Réseaux pondérés



Pour les réseaux pondérés on ajoute des poids (entiers strictement positifs) sur chaque arc.