Logique et Déduction - Cours 3
Calcul et Raisonnement (déductif)

Pierre-Cyrille Héam

pheam [at] femto-st.fr

Licence 2 Informatique

Raisonnement automatique

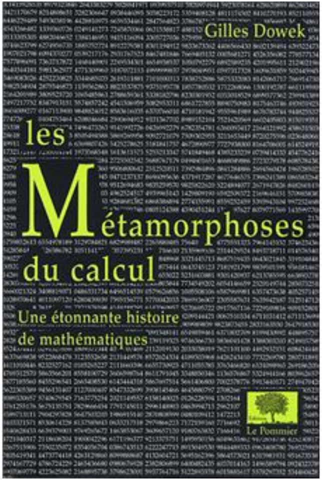
Faire raisonner un ordinateur :

- Qu'est-ce qu'un raissonement (mathématique) ?
- Un ordinateur ne fait que des calculs,
- Peut-on automatiser le raisonnement ? la preuve ?

Lien entre Calcul – Raisonnement – Preuve – Explication

Référence

Pour la mise en perspective, l'histoire, etc.



Plan

Un peu d'histoire : le calcul

Apparition du calcul il y a 5000 ans (au moins).

Tablette [1] comptant une distribution de bières en Mésopotamie, il y a environ 5000 ans (additions, multiplications, divisions, fractions, etc).

1. source wikipedia, tablette du Britsh Museum

Un peu d'histoire : le calcul

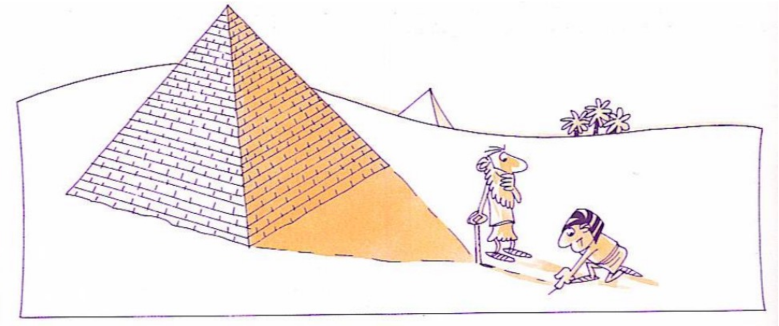
Problèmes mathématiques en Egypte antique.

La payrus d'Ahmes[2] (ou de Rhind) propose 79 problèmes d'artihmétiques, nécessitant les quatre opérations et de résoudre des équations.

2. https://scientificsentence.net/Equations/egypte/index.php?key=yes&Integer=papyrus_rhind

Un peu d'histoire : naissance du raisonnement (explicite)

On attribue parfois le premier raisonnement explicite mathématique à Thalès.



https://mathsalamaison.fr/3eme/3e-thales/

Un peu d'histoire : naissance du raisonnement (explicite)

Algorithme d'Euclide : ne découle pas directement de la définition. Doit être justifié, prouver.

Algorithme Euclide

Pour calculer le pgcd de a et b (entiers positifs, a non nul), on peut utiliser la méthode suivante :

- Si $a < b$, alors $PGCD(a, b) = PGCD(b, a)$,
- Si $a > b$ et $b \neq 0$, $PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b,
- Si $b = 0$, $PGCD(a, b) = a$.

Permet un calcul beaucoup efficace du PGCD qu'un calcul de décompositions en facteurs premiers.

Emmanuel Kant

Grand philosophe du 18ième siècle, Kant classifie les jugements :

Emmanuel Kant

Grand philosophe du 18ième siècle, Kant classifie les jugements :

- Jugement **analytique** : qui découle immédiatement de la définition. *Un triangle a trois angles* ou *Un arbre est un végétal*.

Emmanuel Kant

Grand philosophe du 18ième siècle, Kant classifie les jugements :

- Jugement **analytique** : qui découle immédiatement de la définition. *Un triangle a trois angles* ou *Un arbre est un végétal*.
- Jugement **synthétique** : qui n'est pas analytique. *Un arbre a besoin d'eau*.

Emmanuel Kant

Grand philosophe du 18ième siècle, Kant classifie les jugements :

- Jugement **analytique** : qui découle immédiatement de la définition.*Un triangle a trois angles* ou *Un arbre est un végétal*.
- Jugement **synthétique** : qui n'est pas analytique. *Un arbre a besoin d'eau*.
- Jugement **a priori** : jugement qui se fait par un raisonnement de l'esprit. *La somme des mesures des angles d'un triangles vaut π (180 degrés).*

Emmanuel Kant

Grand philosophe du 18ième siècle, Kant classifie les jugements :

- Jugement **analytique** : qui découle immédiatement de la définition. *Un triangle a trois angles* ou *Un arbre est un végétal*.
- Jugement **synthétique** : qui n'est pas analytique. *Un arbre a besoin d'eau*.
- Jugement **a priori** : jugement qui se fait par un raisonnement de l'esprit. *La somme des mesures des angles d'un triangles vaut* π *(180 degrés).*
- Jugement **a posteriori** : jugement qui découle d'une observation du monde, de la nature. *Les rayons du soleil chauffent*.

Emmanuel Kant

Grand philosophe du 18ième siècle, Kant classifie les jugements :

- Jugement **analytique** : qui découle immédiatement de la définition.*Un triangle a trois angles* ou *Un arbre est un végétal*.
- Jugement **synthétique** : qui n'est pas analytique. *Un arbre a besoin d'eau*.
- Jugement **a priori** : jugement qui se fait par un raisonnement de l'esprit. *La somme des mesures des angles d'un triangles vaut* π *(180 degrés).*
- Jugement **a posteriori** : jugement qui découle d'une observation du monde, de la nature. *Les rayons du soleil chauffent*.

Les résultats de théorèmes mathématiques sont des jugements **a priori** (même si l'observation a pu aider à les trovuer). Sont-ils tous **synthétiques** ?

$2+2=4$ est il un jugement **synthétique** ?

Gottlob Fredge

Au 19ieme siècle, Fredge remet en cause le fait que les résultats mathématiques soient **synthétiques**.

- Formalisation de la définition des entiers,
- Formalisation sur les ensembles,
- Formalisation du raisonnement.

Gottlob Fredge

Au 19ieme siècle, Fredge remet en cause le fait que les résultats mathématiques soient **synthétiques**.

- Formalisation de la définition des entiers,
- Formalisation sur les ensembles,
- Formalisation du raisonnement.

$2 + 2 = 4$ découle directement de la définition de 2 et de 4. C'est un jugement **analytique**.

Bertrand Russel et la théorie des types

La logique de Fredge comportaient néanmoins des contradictions, dont le paradoxe de Russel : on ne peut pas définir l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-même.

Un barbier rase toutes les personnes qui ne se rasent pas elle-même et seulement celles-ci ? Se rase-t-il lui même ?

Bertrand Russel et la théorie des types

La logique de Fredge comportaient néanmoins des contradictions, dont le paradoxe de Russel : on ne peut pas définir l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-même.

Un barbier rase toutes les personnes qui ne se rasent pas elle-même et seulement celles-ci ? Se rase-t-il lui même ?

Cela a conduit à la Théorie des types.

Bertrand Russel et la théorie des types

La logique de Fredge comportaient néanmoins des contradictions, dont le paradoxe de Russel : on ne peut pas définir l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-même.

Un barbier rase toutes les personnes qui ne se rasent pas elle-même et seulement celles-ci ? Se rase-t-il lui même ?

Cela a conduit à la Théorie des types.

Plus tard (1958) le théorème Curry-Howard établira une correspondance entre preuve et typage.

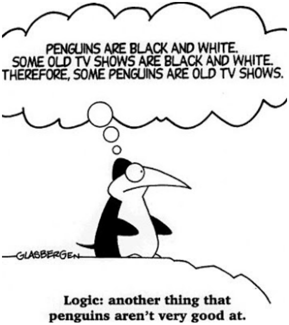
Hilbert et la logique des prédicats

La théorie des types de Russel s'appuie sur la notion d'ensemble.

Dans les année 1920, David Hibert simplifie la théorie de Russel, éliminant ce qui touche aux ensembles et pose les base de la théorie des Prédicats, encore utlisée actuellement.

Plan

Systèmes de Hilbert



- Développés au début du 19ième Siècle,
- Utilisent beaucoup d'axiomes et quelques règles, principalement le *modus ponens* :

$$\text{Si} \quad A \quad \text{et} \quad A \Rightarrow B, \text{ alors} \quad B$$

- Amélioré par la déduction naturelle, puis par le calcul se séquents.

image `http://kjwtokjournal.blogspot.com/2009/04/what-is-difference-between-inductive.html`

Séquents

Introduit par Gerhard Gentzen début 20ième Siècle.
Un séquent est un couple composé de deux listes de formules. On le note usuellement

$$H_1, \ldots, H_k \vdash C_1, \ldots, C_n$$

Signification

Les séquents servent à exprimer des **Théorèmes** du type

Si H_1 **et** ... **et** H_k, **alors** C_1 **ou** ... **ou** C_n.

Séquents

Introduit par Gerhard Gentzen début 20ième Siècle.
Un séquent est un couple composé de deux listes de formules. On le note usuellement

$$H_1, \ldots, H_k \vdash C_1, \ldots, C_n$$

Signification

Les séquents servent à exprimer des **Théorèmes** du type

Si H_1 **et** ... **et** H_k, **alors** C_1 **ou** ... **ou** C_n.

x est un losange, x est un rectangle $\vdash$ x est un carré.

Séquents

Introduit par Gerhard Gentzen début 20ième Siècle.
Un séquent est un couple composé de deux listes de formules. On le note usuellement

$$H_1, \ldots, H_k \vdash C_1, \ldots, C_n$$

Signification

Les séquents servent à exprimer des **Théorèmes** du type

Si H_1 **et** ... **et** H_k, **alors** C_1 **ou** ... **ou** C_n.

x est un losange, x est un rectangle $\vdash$ x est un carré.

$x^2 = 1 \vdash x = 1$, $x = -1$.

Séquents

Introduit par Gerhard Gentzen début 20ième Siècle.
Un séquent est un couple composé de deux listes de formules. On le note usuellement

$$H_1, \ldots, H_k \vdash C_1, \ldots, C_n$$

Signification

Les séquents servent à exprimer des **Théorèmes** du type

$$\text{Si } H_1 \textbf{ et } \ldots \textbf{et } H_k, \textbf{ alors } C_1 \textbf{ ou } \ldots \textbf{ou } C_n.$$

x est un losange, x est un rectangle $\vdash$ x est un carré.

$x^2 = 1 \vdash x = 1, x = -1$.

Une liste de formules est en général notée par une lettre grecque majuscule Γ, Δ, etc.

Exemple fil rouge

On va considérer que les formules utilisées sont 1 et toutes les expressions de la forme $1 + \ldots + 1$, avec un nombre fini de 1.

Exemple fil rouge

On va considérer que les formules utilisées sont 1 et toutes les expressions de la forme $1 + \ldots + 1$, avec un nombre fini de 1.
L'expression $1 + \ldots + 1$ contenant n symboles 1 sera notée, pour plus de lisibilité, $[1]_n$. Par exemple, $1 + 1 + 1 + 1 = [1]_4$.

Exemple fil rouge

On va considérer que les formules utilisées sont 1 et toutes les expressions de la forme $1 + \ldots + 1$, avec un nombre fini de 1.
L'expression $1 + \ldots + 1$ contenant n symboles 1 sera notée, pour plus de lisibilité, $[1]_n$. Par exemple, $1 + 1 + 1 + 1 = [1]_4$.

Loi de raisonnement

Supposons que dans le monde des formules de la forme $[1]_n$, si $[1]_n$ est vraie et $[1]_k$ est vraie, alors $[1]_{n+k}$ est vraie. *Ca n'est pas un théorème, c'est une règle du monde.*

Exemple fil rouge

On va considérer que les formules utilisées sont 1 et toutes les expressions de la forme $1 + \ldots + 1$, avec un nombre fini de 1.
L'expression $1 + \ldots + 1$ contenant n symboles 1 sera notée, pour plus de lisibilité, $[1]_n$. Par exemple, $1 + 1 + 1 + 1 = [1]_4$.

Loi de raisonnement

Supposons que dans le monde des formules de la forme $[1]_n$, si $[1]_n$ est vraie et $[1]_k$ est vraie, alors $[1]_{n+k}$ est vraie. *Ca n'est pas un théorème, c'est une règle du monde.*

Question

Est-il vraie que si $[1]_2$ et $[1]_3$ sont vraie, alors $[1]_7$ est vraie ?

Exemple fil rouge

On va considérer que les formules utilisées sont 1 et toutes les expressions de la forme $1 + \ldots + 1$, avec un nombre fini de 1.
L'expression $1 + \ldots + 1$ contenant n symboles 1 sera notée, pour plus de lisibilité, $[1]_n$. Par exemple, $1 + 1 + 1 + 1 = [1]_4$.

Loi de raisonnement

Supposons que dans le monde des formules de la forme $[1]_n$, si $[1]_n$ est vraie et $[1]_k$ est vraie, alors $[1]_{n+k}$ est vraie. *Ca n'est pas un théorème, c'est une règle du monde.*

Question

Est-il vraie que si $[1]_2$ et $[1]_3$ sont vraie, alors $[1]_7$ est vraie ?
Oui, car $[1]_7 = [1]_2 + [1]_2 + [1]_3$.

Règles

Une règle est un constitué d'une premisse qui est un ensemble de séquents, et une conclusion qui est un séquent. Chaque règle à un nom.
Une règle se note

$$\frac{\text{premisse}}{\text{conclusion}}\ (\text{nom})$$

Règles

Une règle est un constitué d'une premisse qui est un ensemble de séquents, et une conclusion qui est un séquent. Chaque règle à un nom.
Une règle se note

$$\frac{\text{premisse}}{\text{conclusion}}\ (\text{nom})$$

Exemple Rappelons que dans le monde des formules de la forme $[1]_n$, si $[1]_n$ est vraie et $[1]_k$ est vraie, alors $[1]_{n+k}$ est vraie. On aura les règles

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma \vdash B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash A + B, \Delta, \Pi}\ (\text{somme}) \qquad\qquad \frac{}{A \vdash A}\ (\text{axiome})$$

Exemple – preuve

Question

Est-il vraie que si $[1]_2$ et $[1]_3$ sont vraie, alors $[1]_7$ est vraie ?

Exemple – preuve

Question

Est-il vraie que si $[1]_2$ et $[1]_3$ sont vraie, alors $[1]_7$ est vraie ?

$$\dfrac{}{[1]_2 \vdash [1]_2}\ (\text{axiome}) \qquad\qquad \dfrac{}{[1]_3 \vdash [1]_3}\ (\text{axiome})$$

Exemple – preuve

Question

Est-il vraie que si $[1]_2$ et $[1]_3$ sont vraie, alors $[1]_7$ est vraie ?

$$\frac{}{[1]_2 \vdash [1]_2}\ (\text{axiome}) \qquad \frac{}{[1]_3 \vdash [1]_3}\ (\text{axiome})$$

$$\frac{[1]_2 \vdash [1]_2 \qquad [1]_3 \vdash [1]_3}{[1]_2, [1]_3 \vdash [1]_2 + [1]_3 (= [1]_5)}\ (\text{somme})$$

Exemple – preuve

Question

Est-il vraie que si $[1]_2$ et $[1]_3$ sont vraie, alors $[1]_7$ est vraie ?

$$\frac{}{[1]_2 \vdash [1]_2}\ (\text{axiome}) \qquad \frac{}{[1]_3 \vdash [1]_3}\ (\text{axiome})$$

$$\frac{[1]_2 \vdash [1]_2 \qquad [1]_3 \vdash [1]_3}{[1]_2, [1]_3 \vdash [1]_2 + [1]_3 (= [1]_5)}\ (\text{somme})$$

$$\frac{[1]_2 \vdash [1]_2 \qquad [1]_2, [1]_3 \vdash [1]_5}{[1]_2, [1]_2, [1]_3 \vdash [1]_2 + [1]_5}\ (\text{somme})$$

Exemple - Arbre de preuve

$$\dfrac{\dfrac{}{[1]_2 \vdash [1]_2}\,(\text{axiome}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{[1]_2 \vdash [1]_2}\,(\text{axiome}) \qquad \dfrac{}{[1]_3 \vdash [1]_2}\,(\text{axiome})}{[1]_2, [1]_3 \vdash [1]_5}\,(\text{somme})}{[1]_2, [1]_2, [1]_3 \vdash [1]_2 + [1]_5}\,(\text{somme})$$

Exemple - Arbre de preuve

$$\dfrac{\dfrac{}{[1]_2 \vdash [1]_2}\,(\text{axiome}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{[1]_2 \vdash [1]_2}\,(\text{axiome}) \quad \dfrac{}{[1]_3 \vdash [1]_2}\,(\text{axiome})}{[1]_2, [1]_3 \vdash [1]_5}\,(\text{somme})}{[1]_2, [1]_2, [1]_3 \vdash [1]_2 + [1]_5}\,(\text{somme})$$

On peut (et on va) utiliser des règles qui permettent de gérer les redondances et l'ordre des formules dans les séquents.

Exercice 1

Rappel

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma \vdash B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash A + B, \Delta, \Pi} \text{ (somme)} \qquad \frac{}{A \vdash A} \text{ (axiome)}$$

Question

Dessiner un arbre prouvant que si $[1]_3$ et $[1]_4$ sont vraies, alors $[1]_7$ est vraie.

Exercice 1

Rappel

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma \vdash B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash A + B, \Delta, \Pi}\ (\text{somme}) \qquad \frac{}{A \vdash A}\ (\text{axiome})$$

Question

Dessiner un arbre prouvant que si $[1]_3$ et $[1]_4$ sont vraies, alors $[1]_7$ est vraie.

$$\cfrac{\cfrac{}{[1]_3 \vdash [1]_3}\ (\text{axiome}) \qquad \cfrac{}{[1]_4 \vdash [1]_4}\ (\text{axiome})}{[1]_3, [1]_4 \vdash [1]_7}\ (\text{somme})$$

Exercice 2

Rappel

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma \vdash B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash A + B, \Delta, \Pi}\ (\text{somme}) \qquad\qquad \frac{}{A \vdash A}\ (\text{axiome})$$

Question

Dessiner un arbre prouvant que si $[1]_3$ et $[1]_4$ sont vraies, alors $[1]_{14}$ est vraie.

Exercice 2

Rappel

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma \vdash B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash A + B, \Delta, \Pi}\ \text{(somme)} \qquad\qquad \dfrac{}{A \vdash A}\ \text{(axiome)}$$

Question

Dessiner un arbre prouvant que si $[1]_3$ et $[1]_4$ sont vraies, alors $[1]_{14}$ est vraie.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[1]_3 \vdash [1]_3}\ \text{(axiome)} \qquad \dfrac{}{[1]_3 \vdash [1]_3}\ \text{(axiome)}}{[1]_3, [1]_3 \vdash [1]_6}\ \text{(somme)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{[1]_4 \vdash [1]_4}\ \text{(axiome)} \qquad \dfrac{}{[1]_4 \vdash [1]_4}\ \text{(axiome}}{[1]_4, [1]_4 \vdash [1]_8}\ \text{(somme}}{[1]_2, [1]_2, [1]_4, [1]_4 \vdash [1]_{14}}\ \text{(somme)}$$

Calcul des séquents

- L'approche de G. Gentzen par le calcul des séquents peut être utilisé pour la logique des prédicats du premier ordre (système LK).
- On ne va étudier que les règles pour la logique propositionnelle :
  - Le groupe structurel,
  - Le groupe logique,
  - Le groupe identité,

Calcul des séquents

- L'approche de G. Gentzen par le calcul des séquents peut être utilisé pour la logique des prédicats du premier ordre (système LK).
- On ne va étudier que les règles pour la logique propositionnelle :
  - Le groupe structurel,
    pour gérer la structure dans le calculs des séquents, par exemple l'ordre ou la redondance des listes de formules ;
  - Le groupe logique,
  - Le groupe identité,

Calcul des séquents

- L'approche de G. Gentzen par le calcul des séquents peut être utilisé pour la logique des prédicats du premier ordre (système LK).
- On ne va étudier que les règles pour la logique propositionnelle :
  - Le groupe structurel,
    pour gérer la structure dans le calculs des séquents, par exemple l'ordre ou la redondance des listes de formules ;
  - Le groupe logique,
    pour gérer les règles de logique propositionnelles, la conjonction, etc ;
  - Le groupe identité,

Calcul des séquents

- L'approche de G. Gentzen par le calcul des séquents peut être utilisé pour la logique des prédicats du premier ordre (système LK).
- On ne va étudier que les règles pour la logique propositionnelle :
  - Le groupe structurel,
    pour gérer la structure dans le calculs des séquents, par exemple l'ordre ou la redondance des listes de formules ;
  - Le groupe logique,
    pour gérer les règles de logique propositionnelles, la conjonction, etc ;
  - Le groupe identité,
    pour gérer le raisonnement (axiome et *modus ponens*).

Calcul des séquents (groupe structurel)

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathsf{A} \vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \mathsf{A})$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathsf{C} \vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \mathsf{C})$$

Echange

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ (\mathsf{E} \vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sigma(\Delta)}\ (\vdash \mathsf{E})$$

σ : permutation de l'ordre des formules.

Calcul des séquents (groupe structurel)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathsf{A} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \mathsf{A})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathsf{C} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \mathsf{C})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ (\mathsf{E} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sigma(\Delta)}\ (\vdash \mathsf{E})$$

Calcul des séquents (groupe structurel)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathsf{A} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \mathsf{A})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathsf{C} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \mathsf{C})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ (\mathsf{E} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sigma(\Delta)}\ (\vdash \mathsf{E})$$

$$H_1, H_2, H_3, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2$$

Calcul des séquents (groupe structurel)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\text{A} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \text{A})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\text{C} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \text{C})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ (\text{E} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sigma(\Delta)}\ (\vdash \text{E})$$

$$\frac{H_1, H_2, H_3, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}{H_2, H_3, H_1, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}\ (\text{E} \vdash)$$

Calcul des séquents (groupe structurel)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathsf{A} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \mathsf{A})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathsf{C} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \mathsf{C})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ (\mathsf{E} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sigma(\Delta)}\ (\vdash \mathsf{E})$$

$$\cfrac{\cfrac{H_1, H_2, H_3, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}{H_2, H_3, H_1, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}\ (\mathsf{E} \vdash)}{H_2, H_3, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}\ (\mathsf{C} \vdash)$$

Calcul des séquents (groupe structurel)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\text{A} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \text{A})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\text{C} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \text{C})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ (\text{E} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sigma(\Delta)}\ (\vdash \text{E})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{H_1, H_2, H_3, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}{H_2, H_3, H_1, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}\ (\text{E} \vdash)}{H_2, H_3, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}\ (\text{C} \vdash)}{H_2, H_3, H_1 \vdash C_2, C_2, C_1}\ (\vdash \text{E})$$

Calcul des séquents (groupe structurel)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\text{A} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \text{A})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\text{C} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \text{C})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ (\text{E} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sigma(\Delta)}\ (\vdash \text{E})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{H_1, H_2, H_3, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}{H_2, H_3, H_1, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}\ (\text{E} \vdash)}{H_2, H_3, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}\ (\text{C} \vdash)}{H_2, H_3, H_1 \vdash C_2, C_2, C_1}\ (\vdash \text{E})}{H_2, H_3, H_1 \vdash C_2, C_1}\ (\vdash \text{C})$$

Calcul des séquents (groupe structurel)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathsf{A} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \mathsf{A})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathsf{C} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash \mathsf{C})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ (\mathsf{E} \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sigma(\Delta)}\ (\vdash \mathsf{E})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{H_1, H_2, H_3, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}{H_2, H_3, H_1, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}\ (\mathsf{E} \vdash)}{H_2, H_3, H_1 \vdash C_1, C_2, C_2}\ (\mathsf{C} \vdash)}{H_2, H_3, H_1 \vdash C_2, C_2, C_1}\ (\vdash \mathsf{E})}{H_2, H_3, H_1 \vdash C_2, C_1}\ (\vdash \mathsf{C})}{H_2, H_3, H_1 \vdash C_3, C_2, C_1}\ (\vdash \mathsf{A})$$

Calcul des séquents (groupe logique)

Négation

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg)$$

Conjonction

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\vdash \wedge)$$

Disjonction

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

Implication

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ (\vdash \Rightarrow)$$

Calcul des séquents (groupe logique)

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\vdash \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ (\vdash \Rightarrow)$$

Calcul des séquents (groupe logique)

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\vdash \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ (\vdash \Rightarrow)$$

$$H_1, H_2 \vdash C_1, C_2$$

Calcul des séquents (groupe logique)

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \ (\vdash \neg)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \ (\vdash \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \ (\vdash \vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \ (\Rightarrow \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \ (\vdash \Rightarrow)$$

$$\frac{H_1, H_2 \vdash C_1, C_2}{H_1 \vdash H_2 \Rightarrow C_1, C_2} \ (\vdash \Rightarrow)$$

Calcul des séquents (groupe logique)

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\vdash \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow\vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ (\vdash\Rightarrow)$$

$$\cfrac{\cfrac{H_1, H_2 \vdash C_1, C_2}{H_1 \vdash H_2 \Rightarrow C_1, C_2}\ (\vdash\Rightarrow)}{H_1, \neg(H_2 \Rightarrow C_1) \vdash C_2}\ (\neg \vdash)$$

Calcul des séquents (groupe logique)

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\vdash \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ (\vdash \Rightarrow)$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{H_1, H_2 \vdash C_1, C_2}{H_1 \vdash H_2 \Rightarrow C_1, C_2}\ (\vdash \Rightarrow)}{H_1, \neg(H_2 \Rightarrow C_1) \vdash C_2}\ (\neg \vdash)}{H_1 \wedge \neg(H_2 \Rightarrow C_1) \vdash C_2}\ (\wedge \vdash)$$

Calcul des séquents (groupe logique)

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg\ )$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\vdash \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow\vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ (\vdash\Rightarrow)$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{H_1, H_2 \vdash C_1, C_2}{H_1 \vdash H_2 \Rightarrow C_1, C_2}\ (\vdash\Rightarrow)}{H_1, \neg(H_2 \Rightarrow C_1) \vdash C_2}\ (\neg \vdash)}{H_1 \wedge \neg(H_2 \Rightarrow C_1) \vdash C_2}\ (\wedge \vdash)}{\vdash \neg(H_1 \wedge \neg(H_2 \Rightarrow C_1)), C_2}\ (\vdash \neg)$$

Calcul des séquents (groupe logique)

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\vdash \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow\vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ (\vdash\Rightarrow)$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{H_1, H_2 \vdash C_1, C_2}{H_1 \vdash H_2 \Rightarrow C_1, C_2}\ (\vdash\Rightarrow)}{H_1, \neg(H_2 \Rightarrow C_1) \vdash C_2}\ (\neg \vdash)}{H_1 \wedge \neg(H_2 \Rightarrow C_1) \vdash C_2}\ (\wedge \vdash)}{\vdash \neg(H_1 \wedge \neg(H_2 \Rightarrow C_1)), C_2}\ (\vdash \neg)}{\vdash \neg(H_1 \wedge \neg(H_2 \Rightarrow C_1)) \vee C_2}\ (\vdash \vee)$$

Calcul des séquents (groupe identité)

Axiomes

$$\dfrac{}{A \vdash A}\ (\mathsf{Ax})$$

Coupure

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Pi, A \vdash \Sigma}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}\ (\mathsf{cut})$$

Calcul des séquents (groupe identité)

Axiomes

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\mathsf{Ax})$$

Coupure

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Pi, A \vdash \Sigma}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}\ (\mathsf{cut})$$

La règle de coupure est une généralisation du *modus ponens*

$$\frac{\vdash A \qquad A \vdash B}{\vdash B}\ (\mathsf{cut})$$

Théorème et séquents valides

La formule associée à un séquent $H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_k$ est la formule $(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n) \Rightarrow (C_1 \vee C_2 \vee \dots C_k)$.

Un séquent est valide si sa formule associée est une tautologie (vraie pour toute interprétation)[3].

3. Avec la notation vue avec Monsieur Masson, $H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_k$ est valide si $\{H_1, \dots, H_n\} \models C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$

Exemple 1

Le séquent $\vdash A \wedge \neg A$ est valide.

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\text{Ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

Exemple 1

Le séquent $\vdash A \wedge \neg A$ est valide.

$$\frac{}{}\ (\text{Ax})$$

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\text{Ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

Exemple 1

Le séquent $\vdash A \wedge \neg A$ est valide.

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\text{Ax})$$

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\text{Ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

Exemple 1

Le séquent $\vdash A \wedge \neg A$ est valide.

$$\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A}\,(\mathsf{Ax})}{}\,(\vdash \neg)$$

$$\frac{}{A \vdash A}\,(\mathsf{Ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,(\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vdash \vee)$$

Exemple 1

Le séquent $\vdash A \wedge \neg A$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ (\mathsf{Ax})}{\vdash \neg A, A}\ (\vdash \neg)$$

$$\dfrac{}{A \vdash A}\ (\mathsf{Ax}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

Exemple 1

Le séquent $\vdash A \wedge \neg A$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ (\text{Ax})}{\vdash \neg A, A}\ (\vdash \neg)}{}\ (\vdash \vee)$$

$$\dfrac{}{A \vdash A}\ (\text{Ax}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

Exemple 1

Le séquent $\vdash A \wedge \neg A$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\mathsf{Ax})}{\vdash \neg A, A}\,(\vdash \neg)}{\vdash \neg A \vee A}\,(\vdash \vee)$$

$$\dfrac{}{A \vdash A}\,(\mathsf{Ax}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,(\neg \vdash) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vdash \vee)$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ est valide.

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,(\vdash \neg) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\,(\Rightarrow\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vdash \vee)$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \lor B$ est valide.

$$\frac{}{\quad\quad}\ (\mathsf{Ax})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\ (\vdash \lor)$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ est valide.

$$\dfrac{}{A \vdash A}\ (\mathsf{Ax})$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow\vdash) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ (\text{Ax})}{}\ (\vdash\text{A})$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow\vdash) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ (\text{Ax})}{A \vdash B, A}\ (\vdash\text{A})$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow\vdash) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ est valide.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A}\,(\mathsf{Ax})}{A \vdash B, A}\,(\vdash\mathsf{A})}{A \vdash A, B}\,(\vdash\mathsf{E})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,(\vdash \neg) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\,(\Rightarrow\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vdash \vee)$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ (\text{Ax})}{A \vdash B, A}\ (\vdash\text{A})}{A \vdash A, B}\ (\vdash\text{E}) \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\ (\text{Ax})$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash \neg) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow\vdash) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\mathrm{Ax})}{A \vdash B, A}\,(\vdash\mathrm{A})}{A \vdash A, B}\,(\vdash\mathrm{E}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,(\mathrm{Ax})}{B, A \vdash B}\,(\mathrm{A}\vdash)$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,(\vdash \neg) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\,(\Rightarrow\vdash) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vdash \vee)$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\text{Ax})}{A \vdash B, A}\,(\vdash\text{A})}{A \vdash A, B}\,(\vdash\text{E}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,(\text{Ax})}{B, A \vdash B}\,(\text{A}\vdash)}{A, B \vdash B}\,(\vdash\text{E})$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,(\vdash \neg\,) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\,(\Rightarrow\vdash) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vdash \vee)$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ est valide.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{A \vdash A}\,(\mathsf{Ax})
    }{A \vdash B, A}\,(\vdash\mathsf{A})
  }{A \vdash A, B}\,(\vdash\mathsf{E})
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{B \vdash B}\,(\mathsf{Ax})
    }{B, A \vdash B}\,(\mathsf{A}\vdash)
  }{A, B \vdash B}\,(\vdash\mathsf{E})
}{A, A \Rightarrow B \vdash B}\,(\Rightarrow\vdash)
$$

$$
\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,(\vdash \neg)
\qquad
\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\,(\Rightarrow\vdash)
\qquad
\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vdash \vee)
$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\text{Ax})}{A \vdash B, A}\,(\vdash\text{A})}{A \vdash A, B}\,(\vdash\text{E}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,(\text{Ax})}{B, A \vdash B}\,(\text{A}\vdash)}{A, B \vdash B}\,(\vdash\text{E})}{\dfrac{A, A \Rightarrow B \vdash B}{A \Rightarrow B \vdash \neg A, B}\,(\vdash \neg)}\,(\Rightarrow\vdash)$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,(\vdash \neg) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\,(\Rightarrow\vdash) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vdash \vee)$$

Exemple 2

Le séquent $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\text{Ax})}{A \vdash B, A}\,(\vdash\text{A})}{A \vdash A, B}\,(\vdash\text{E}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,(\text{Ax})}{B, A \vdash B}\,(\text{A}\vdash)}{A, B \vdash B}\,(\vdash\text{E})}{A, A \Rightarrow B \vdash B}\,(\Rightarrow\vdash)}{\dfrac{A \Rightarrow B \vdash \neg A, B}{A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B}\,(\vdash \vee)}\,(\vdash \neg)$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,(\vdash \neg) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\,(\Rightarrow\vdash) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vdash \vee)$$

Exemple 3 (en partant de la racine)

Le séquent $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ est valide.

$$\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$$

Exemple 3 (en partant de la racine)

Le séquent $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ est valide.

$$\frac{\neg A \vee B, A \vdash B}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}\ (\vdash\Rightarrow)$$

Exemple 3 (en partant de la racine)

Le séquent $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ est valide.

$$\cfrac{\cfrac{A, \neg A \vee B \vdash B}{\neg A \vee B, A \vdash B}\ (\mathrm{E}\vdash)}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}\ (\vdash\Rightarrow)$$

Exemple 3 (en partant de la racine)

Le séquent $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ est valide.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, \neg A \vdash B \qquad A, B \vdash B}{A, \neg A \vee B \vdash B}\ (\vee\vdash)}{\neg A \vee B, A \vdash B}\ (\mathsf{E}\vdash)}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}\ (\vdash\Rightarrow)
$$

Exemple 3 (en partant de la racine)

Le séquent $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ est valide.

$$
\dfrac{\dfrac{A, \neg A \vdash B \qquad \dfrac{B, A \vdash B}{A, B \vdash B}\,(\vdash E)}{A, \neg A \vee B \vdash B}\,(\vee\vdash)}{\dfrac{\neg A \vee B, A \vdash B}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}\,(\vdash\Rightarrow)}\,(E\vdash)
$$

Exemple 3 (en partant de la racine)

Le séquent $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ est valide.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
A, \neg A \vdash B
\qquad
\dfrac{
\dfrac{B \vdash B}{B, A \vdash B}\ (\mathsf{A}\vdash)
}{A, B \vdash B}\ (\vdash\mathsf{E})
}{A, \neg A \vee B \vdash B}\ (\vee\vdash)
}{\neg A \vee B, A \vdash B}\ (\mathsf{E}\vdash)
}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}\ (\vdash\Rightarrow)
$$

Exemple 3 (en partant de la racine)

Le séquent $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ est valide.

$$
\dfrac{\dfrac{A, \neg A \vdash B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\;(\vdash \text{Ax})}{B, A \vdash B}\;(\text{A}\vdash)}{A, B \vdash B}\;(\vdash \text{E})}{\dfrac{A, \neg A \vee B \vdash B}{\neg A \vee B, A \vdash B}\;(\text{E}\vdash)}\;(\vee \vdash)}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}\;(\vdash \Rightarrow)
$$

Exemple 3 (en partant de la racine)

Le séquent $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A, B}{A, \neg A \vdash B}\;(\neg\vdash) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\;(\vdash\mathrm{Ax})}{B, A \vdash B}\;(\mathrm{A}\vdash)}{A, B \vdash B}\;(\vdash\mathrm{E})}{A, \neg A \vee B \vdash B}\;(\vee\vdash)}{\neg A \vee B, A \vdash B}\;(\mathrm{E}\vdash)}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}\;(\vdash\Rightarrow)$$

Exemple 3 (en partant de la racine)

Le séquent $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ est valide.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{A \vdash B, A}{A \vdash A, B}\,(\vdash\text{E})
}{A, \neg A \vdash B}\,(\neg\vdash)
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{B \vdash B}\,(\vdash\text{Ax})
}{B, A \vdash B}\,(\text{A}\vdash)
}{A, B \vdash B}\,(\vdash\text{E})
}{A, \neg A \vee B \vdash B}\,(\vee\vdash)
}{\dfrac{\neg A \vee B, A \vdash B}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}\,(\vdash\Rightarrow)}\,(\text{E}\vdash)
$$

Exemple 3 (en partant de la racine)

Le séquent $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ est valide.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{A \vdash A}{A \vdash B, A}\,(\vdash \mathsf{A})
}{A \vdash A, B}\,(\vdash \mathsf{E})
}{A, \neg A \vdash B}\,(\neg \vdash)
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{B \vdash B}\,(\vdash \mathsf{Ax})
}{B, A \vdash B}\,(\mathsf{A}\vdash)
}{A, B \vdash B}\,(\vdash \mathsf{E})
}{
\dfrac{
\dfrac{A, \neg A \vee B \vdash B}{\neg A \vee B, A \vdash B}\,(\mathsf{E}\vdash)
}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}\,(\vdash \Rightarrow)
}\,(\vee \vdash)
$$

Exemple 3 (en partant de la racine)

Le séquent $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ est valide.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\vdash \mathrm{Ax})}{A \vdash B, A}\,(\vdash \mathrm{A})}{A \vdash A, B}\,(\vdash \mathrm{E})}{A, \neg A \vdash B}\,(\neg \vdash) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,(\vdash \mathrm{Ax})}{B, A \vdash B}\,(\mathrm{A}\vdash)}{A, B \vdash B}\,(\vdash \mathrm{E})}{\dfrac{A, \neg A \vee B \vdash B}{\dfrac{\neg A \vee B, A \vdash B}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}\,(\vdash \Rightarrow)}\,(\mathrm{E}\vdash)}\,(\vee \vdash)$$

Exemple 4

Le séquent $A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C$ est valide.

Exemple 4

Le séquent $A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C$ est valide.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$(\vdash \mathrm{Ax})$}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$(\vdash \mathrm{A})$}
\UnaryInfC{$A \vdash B, A$}
\RightLabel{$(\vdash \mathrm{E})$}
\UnaryInfC{$A \vdash A, B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$(\vdash \mathrm{Ax})$}
\UnaryInfC{$B \vdash B$}
\RightLabel{$(\mathrm{A}\vdash)$}
\UnaryInfC{$A, B \vdash B$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\vdash)$}
\BinaryInfC{$A, A \Rightarrow B \vdash B$}
\RightLabel{$(\vdash \mathrm{A})$}
\UnaryInfC{$A, A \Rightarrow B \vdash C, B$}
\RightLabel{$(\vdash \mathrm{E})$}
\UnaryInfC{$A, A \Rightarrow B \vdash B, C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$(\vdash \mathrm{Ax})$}
\UnaryInfC{$C \vdash C$}
\RightLabel{$(\mathrm{A}\vdash)$}
\UnaryInfC{$C, A \Rightarrow B \vdash C$}
\RightLabel{$(\mathrm{A}\vdash)$}
\UnaryInfC{$C, A \Rightarrow B, A \vdash C$}
\RightLabel{$(\mathrm{E}\vdash)$}
\UnaryInfC{$A, A \Rightarrow B, C \vdash C$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\vdash)$}
\BinaryInfC{$A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C$}
\end{prooftree}
$$

$$
\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\Rightarrow\vdash)
$$

Exemple 5

Le séquent $A_1\, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \ldots, A_{n-1} \Rightarrow A_n \vdash A_n$ est valide.

Exemple 5

Le séquent $A_1\, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \ldots, A_{n-1} \Rightarrow A_n \vdash A_n$ est valide.

- L'arbre de preuve utilise de l'ordre de 5n règles.

Exemple 5

Le séquent $A_1\, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \ldots, A_{n-1} \Rightarrow A_n \vdash A_n$ est valide.

- L'arbre de preuve utilise de l'ordre de 5n règles.
- La table de vérité a 2^n lignes.

Exemple 5

Le séquent $A_1\, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \ldots, A_{n-1} \Rightarrow A_n \vdash A_n$ est valide.

- L'arbre de preuve utilise de l'ordre de 5n règles.
- La table de vérité a 2^n lignes.
- Si $n = 80$, il faut environ 400 règles. La table de vérité comporte de l'ordre de 10^{24} lignes, soit plus que le nombre de grains de sables estimé du Sahara.

Exemple 5

Le séquent $A_1\, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \ldots, A_{n-1} \Rightarrow A_n \vdash A_n$ est valide.

- L'arbre de preuve utilise de l'ordre de 5n règles.
- La table de vérité a 2^n lignes.
- Si $n = 80$, il faut environ 400 règles. La table de vérité comporte de l'ordre de 10^{24} lignes, soit plus que le nombre de grains de sables estimé du Sahara.

Les preuves par *raisonnement* (en utilisant les séquent) peuvent être beaucoup plus courtes qu'une table de vérité et de plus *explicatives* (mais il faut les trouver).

Exercice

Montrer à l'aide d'un arbre de preuve que le séquent $A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{}\,(\vdash\text{Ax})}{}\,(\text{A}\vdash)}{}\,(\text{A}\vdash)}{}\,(\text{E}\vdash)}{}\,(\wedge\vdash)}{}\,(\text{E}\vdash)}{A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A}\,(\vdash\Rightarrow)$$

Exercice

Montrer à l'aide d'un arbre de preuve que le séquent $A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\qquad}\,(\vdash \text{Ax})}{\qquad}\,(\text{A}\vdash)}{\qquad}\,(\text{A}\vdash)}{\qquad}\,(\text{E}\vdash)}{\qquad}\,(\wedge\vdash)}{A \wedge \neg B, B \vdash A}\,(\text{E}\vdash)}{A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A}\,(\vdash\Rightarrow)$$

Exercice

Montrer à l'aide d'un arbre de preuve que le séquent $A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\qquad\qquad}\,(\vdash \mathrm{Ax})}{\qquad\qquad\qquad}\,(\mathrm{A}\vdash)}{\qquad\qquad\qquad\qquad}\,(\mathrm{A}\vdash)}{\qquad\qquad\qquad\qquad}\,(\mathrm{E}\vdash)}{B, A \wedge \neg B \vdash A}\,(\wedge \vdash)}{A \wedge \neg B, B \vdash A}\,(\mathrm{E}\vdash)}{A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A}\,(\vdash\Rightarrow)$$

Exercice

Montrer à l'aide d'un arbre de preuve que le séquent $A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{}\;(\vdash\text{Ax})}{}\;(\text{A}\vdash)}{}\;(\text{A}\vdash)}{B, A, \neg B \vdash A}\;(\text{E}\vdash)}{B, A \wedge \neg B \vdash A}\;(\wedge\vdash)}{A \wedge \neg B, B \vdash A}\;(\text{E}\vdash)}{A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A}\;(\vdash\Rightarrow)$$

Exercice

Montrer à l'aide d'un arbre de preuve que le séquent $A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{}\;(\vdash\text{Ax})}{}\;(\text{A}\vdash)}{A, B, \neg B \vdash A}\;(\text{A}\vdash)}{B, A, \neg B \vdash A}\;(\text{E}\vdash)}{B, A \wedge \neg B \vdash A}\;(\wedge\vdash)}{A \wedge \neg B, B \vdash A}\;(\text{E}\vdash)}{A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A}\;(\vdash\Rightarrow)$$

Exercice

Montrer à l'aide d'un arbre de preuve que le séquent $A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\quad}\;(\vdash\text{Ax})}{A, B \vdash A}\;(\text{A}\vdash)}{A, B, \neg B \vdash A}\;(\text{A}\vdash)}{B, A, \neg B \vdash A}\;(\text{E}\vdash)}{B, A \wedge \neg B \vdash A}\;(\wedge\vdash)}{A \wedge \neg B, B \vdash A}\;(\text{E}\vdash)}{A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A}\;(\vdash\Rightarrow)$$

Exercice

Montrer à l'aide d'un arbre de preuve que le séquent $A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\vdash\text{Ax})}{A, B \vdash A}\,(\text{A}\vdash)}{A, B, \neg B \vdash A}\,(\text{A}\vdash)}{B, A, \neg B \vdash A}\,(\text{E}\vdash)}{B, A \wedge \neg B \vdash A}\,(\wedge\vdash)}{A \wedge \neg B, B \vdash A}\,(\text{E}\vdash)}{A \wedge \neg B \vdash B \Rightarrow A}\,(\vdash\Rightarrow)
$$

Théorème d'incomplétude Gödel

Le calcul des séquents peut s'étendre aux formules du premier ordre (avec des règles adéquates), ainsi qu'à des théories plus riches.

Théorème d'incomplétude de Gödel

Dans toute théorie logique suffisament riche (contenant les entiers, l'addition et la multiplication), il existe des ennoncés A tels que, ni le séquent $\vdash A$ ni le sequent $\vdash \neg A$ ne sont démontrable par les règles de déduction.

Autres résultats

- La théorie de l'arithmétique sur les entiers avec uniquement l'addition est complète et décidable (Presburger)
- La théorie de l'arithmétique sur les entiers avec uniquement la multiplication est complète et décidable (Skolem)
- La théorie de l'arithmétique sur les réels avec uniquement la multiplication est complète et décidable (Tarski)

Plan

Exemple

proposition

354128211 est un multiple de 3.

Exemple

proposition

354128211 est un multiple de 3.

Preuve 1 :

$$
\begin{array}{ccccccccc|l}
3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 8 & 2 & 1 & 1 & 3 \\
\cline{10-10}
0 & 5 & & & & & & & & 1\ 1\ 8\ 0\ 4\ 2\ 7\ 3\ 7 \\
 & 2 & 4 & & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & 2 & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 8 & & & & \\
 & & & & 0 & 2 & 2 & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & 0 & 2 & 1 & \\
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$354128211 = 3 * 118042737$, donc 354128211 est un multiple de 3.

Exemple

proposition

354128211 est un multiple de 3.

Preuve 2 :

$$\begin{aligned} 354128211 = {} & 3.10^8 + 5.10^7 + 4.10^6 + 1.10^5 + 2.10^4 + 8.10^3 \\ & + 2.10^2 + 1.10^1 + 1.10^0 \end{aligned}$$

Exemple

proposition

354128211 est un multiple de 3.

Preuve 2 :

$$\begin{aligned}
354128211 &= 3.10^8 + 5.10^7 + 4.10^6 + 1.10^5 + 2.10^4 + 8.10^3 \\
&\quad + 2.10^2 + 1.10^1 + 1.10^0 \\
&= 3.(10^8 - 1) + 5.(10^7 - 1) + 4.(10^6 - 1) + \ldots + 10^0 - 1 \\
&\quad + 3 + 5 + 4 + 1 + 2 + 8 + 2 + 1 + 1 \\
&= 3.(10^8 - 1) + 5.(10^7 - 1) + 4.(10^6 - 1) + \ldots + 10^0 - 1 \\
&\quad + 27
\end{aligned}$$

Exemple

proposition

354128211 est un multiple de 3.

Preuve 2 :

$$\begin{aligned}
354128211 &= 3.10^8 + 5.10^7 + 4.10^6 + 1.10^5 + 2.10^4 + 8.10^3 \\
&\quad + 2.10^2 + 1.10^1 + 1.10^0 \\
&= 3.(10^8 - 1) + 5.(10^7 - 1) + 4.(10^6 - 1) + \ldots + 10^0 - 1 \\
&\quad + 3 + 5 + 4 + 1 + 2 + 8 + 2 + 1 + 1 \\
&= 3.(10^8 - 1) + 5.(10^7 - 1) + 4.(10^6 - 1) + \ldots + 10^0 - 1 \\
&\quad + 27
\end{aligned}$$

$10^n - 1 = 9 * 1 \ldots 1$ est un multiple de 3.

Exemple

proposition

354128211 est un multiple de 3.

Preuve 2 :

$$\begin{aligned}
354128211 &= 3.10^8 + 5.10^7 + 4.10^6 + 1.10^5 + 2.10^4 + 8.10^3 \\
&\quad + 2.10^2 + 1.10^1 + 1.10^0 \\
&= 3.(10^8 - 1) + 5.(10^7 - 1) + 4.(10^6 - 1) + \ldots + 10^0 - 1 \\
&\quad + 3 + 5 + 4 + 1 + 2 + 8 + 2 + 1 + 1 \\
&= 3.(10^8 - 1) + 5.(10^7 - 1) + 4.(10^6 - 1) + \ldots + 10^0 - 1 \\
&\quad + 27
\end{aligned}$$

$10^n - 1 = 9 * 1 \ldots 1$ est un multiple de 3.

La somme de 2 multiples de 3 est un multiple de 3.

Exemple

proposition

354128211 est un multiple de 3.

Preuve 2 :

$$\begin{aligned}
354128211 &= 3.10^8 + 5.10^7 + 4.10^6 + 1.10^5 + 2.10^4 + 8.10^3 \\
&\quad + 2.10^2 + 1.10^1 + 1.10^0 \\
&= 3.(10^8 - 1) + 5.(10^7 - 1) + 4.(10^6 - 1) + \ldots + 10^0 - 1 \\
&\quad + 3 + 5 + 4 + 1 + 2 + 8 + 2 + 1 + 1 \\
&= 3.(10^8 - 1) + 5.(10^7 - 1) + 4.(10^6 - 1) + \ldots + 10^0 - 1 \\
&\quad + 27
\end{aligned}$$

$10^n - 1 = 9 * 1 \ldots 1$ est un multiple de 3.
La somme de 2 multiples de 3 est un multiple de 3.
$27 = 3 * 9$ est un multiple de 3. Donc 354128211 est un multiple de 3.

La première preuve est juste mais ne dit pas beaucoup plus que le résultat.

La seconde permet d'obtenir la généralistion
Tout nombre écrit en décimal dont la somme des chiffres est un multiple de 3 est un multiple de 3.

La première preuve est juste mais ne dit pas beaucoup plus que le résultat.

La seconde permet d'obtenir la généralistion
Tout nombre écrit en décimal dont la somme des chiffres est un multiple de 3 est un multiple de 3.

Elle permet aussi d'avoir le résultat :
Tout nombre écrit en décimal dont la somme des chiffres est un multiple de 9 est un multiple de 9.

- Une preuve obtenue par un calcul/algorithme prouve la correction d'un théorème,

- Une preuve obtenue par un calcul/algorithme prouve la correction d'un théorème,
- Une preuve obtenue par un raisonnement permet
  - D'expliquer le pourquoi de la correction,
  - De généraliser,

- Une preuve obtenue par un calcul/algorithme prouve la correction d'un théorème,
- Une preuve obtenue par un raisonnement permet
  - D'expliquer le pourquoi de la correction,
  - De généraliser,

Les liens entre preuve, calcul, algorithme/construction, explications sont étroits.

Indécidabilité

Si certains ennoncés sont indémontrables, ainsi que leurs contradictions (théorème de Gödel), certains problèmes bien posés sont aussi incalculables, on parle d'indécidabilité.

Indécidabilité

Si certains ennoncés sont indémontrables, ainsi que leurs contradictions (théorème de Gödel), certains problèmes bien posés sont aussi incalculables, on parle d'indécidabilité.

On considère le problème suivant :

Données : un ensemble T fini de tuiles carrées dont les bords sont colorés et dont l'orientation est fixée.

Question : Peut-on paver n'importe quelle surface avec des tuiles ayant uniquement des motifs appartenant à T de façon à ce que les couleurs de deux arrêtes de tuiles qui se touchent soient les mêmes ?

Deux instances de ce problème :

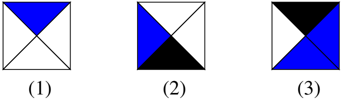


Figure – une instance du problème de pavage pour laquelle une solution existe.

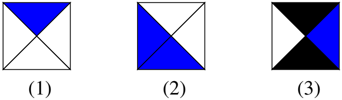


Figure – une instance du problème de pavage pour laquelle aucune solution n'existe.

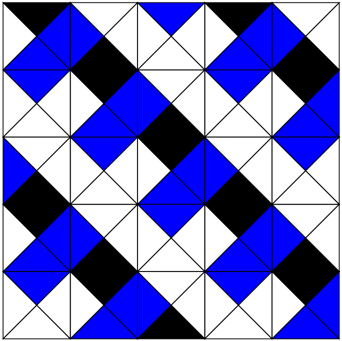


Figure – solution pour la première instance.

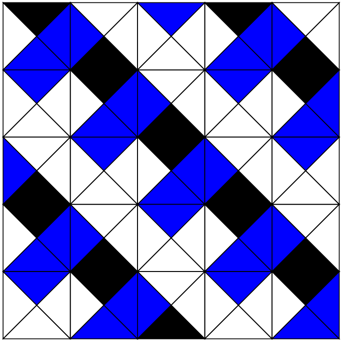


Figure – solution pour la première instance.

Ce problème est indécidable.

Problème de l'arrêt

Le problème suivant est indécidable :

Arrêt

Données : Un programme écrit en C ou en Java et une entrée w de ce programme.
Sortie : `Vrai` si le programme s'arrête sur l'entrée, `Faux` sinon.

Problème de l'arrêt

Le problème suivant est indécidable :

Arrêt

Données : Un programme écrit en C ou en Java et une entrée w de ce programme.
Sortie : `Vrai` si le programme s'arrête sur l'entrée, `Faux` sinon.

Théorème de Rice : *Tout problème sémantique non trivial sur un programme est indécidable.*

- La correspondance de Curry-Howard désigne une série de résultats mathématique établissant une bijection entre preuves mathématiques et programmes informatiques/algorithmes.
  Comme conséquence, on ne peut pas breuveté un algorithme, ce qui reviendrait à breuveté une preuve mathématique, ce qui n'est pas possible.[4]

4. http://bat8.inria.fr/~lang/ecrits/larecherche/03280721.html
5. https://www.humanbrainproject.eu/en/

- La correspondance de Curry-Howard désigne une série de résultats mathématique établissant une bijection entre preuves mathématiques et programmes informatiques/algorithmes.
  Comme conséquence, on ne peut pas breuveté un algorithme, ce qui reviendrait à breuveté une preuve mathématique, ce qui n'est pas possible. [4]
- Le cerveau est-il une machine ? [5]

4. http://bat8.inria.fr/~lang/ecrits/larecherche/03280721.html
5. https://www.humanbrainproject.eu/en/

- La correspondance de Curry-Howard désigne une série de résultats mathématique établissant une bijection entre preuves mathématiques et programmes informatiques/algorithmes.
  Comme conséquence, on ne peut pas breuveté un algorithme, ce qui reviendrait à breuveté une preuve mathématique, ce qui n'est pas possible. [4]
- Le cerveau est-il une machine ? [5]
- Certains résultats mathématiques n'admettent pas de preuve *courte*.

4. http://bat8.inria.fr/~lang/ecrits/larecherche/03280721.html
5. https://www.humanbrainproject.eu/en/

- La correspondance de Curry-Howard désigne une série de résultats mathématique établissant une bijection entre preuves mathématiques et programmes informatiques/algorithmes.
  Comme conséquence, on ne peut pas breuveté un algorithme, ce qui reviendrait à breuveté une preuve mathématique, ce qui n'est pas possible. [4]
- Le cerveau est-il une machine ? [5]
- Certains résultats mathématiques n'admettent pas de preuve *courte*.
- Comment garantir la fiabilité des logiciel ?

4. http://bat8.inria.fr/~lang/ecrits/larecherche/03280721.html
5. https://www.humanbrainproject.eu/en/