

Exercice 4. (*Preuves*)

En utilisant le calcul de séquents, donner des arbres de preuve justifiant que les séquents suivants sont valides.

1. $A, B, C \vdash B, C, A$
2. $A, B, A \vdash A$
3. $A \vdash \neg\neg A$
4. $\neg\neg A \vdash A$
5. $A \wedge B \vdash B \wedge A$
6. $A \wedge A \vdash A$
7. $A \wedge B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$
8. $\vdash A \vee (A \Rightarrow B)$
9. $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \vdash \neg A$

Exercice 5. (*Preuves courtes*)

1. Donner un arbre prouvant que le séquent $A_1 \wedge A_2 \vdash A_1 \vee A_2$ est valide.
2. Même question avec $A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3) \vdash (A_1 \vee A_2) \vee A_3$.
3. Même question avec $(A_1 \wedge (A_2 \wedge (A_3 \dots (A_{n-1} \wedge A_n) \dots))) \vdash ((\dots (A_1 \vee A_2) \vee A_3 \dots \vee A_{n-1}) \vee A_n)$.
Combien de règles l'arbre utilise-t-il ?
4. Combien de ligne a la table de vérité d'un formule avec n variables ?

Exercice 6. Donner un arbre de preuve montrant que le séquent

$$(\neg A \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$$

est valide.