Logique et Déduction – Licence 2 – Codage SAT

UFR-ST – Université de Franche-Comté

Tous les exercices ne seront pas nécessairement traités en TD. Les chercher chez soi est une bonne façon d'approfondir les notions abordées ici sont à la base de nombreux concepts fondateurs en informatique. Vous pouvez questionner en fin (ou pendant si la situation le permet) le/la chargé(é) de TD sur les exercices non traités en cas de besoin.

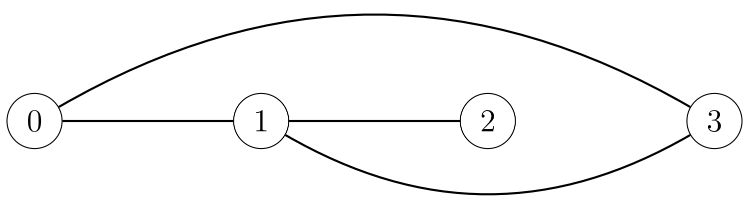
Exercice 1. *(Linéarisation d'indices de variables)*
On considère des variables $X_{i,j}$ pour i variant de 1 à n et j de 1 à m.

1. Proposer un algorithme de linéarisation des indices, c'est-à-dire une fonction $X(i, j, n, m)$ qui retourne un entier entre 1 et $n * m$ de telle sorte que pour n et m fixés, la correspondance soit bijective.
2. Proposer un algorithme $Inv(r, n, m)$ qui étant donné un entier r entre 1 et $n * m$ retourne un couple (i, j) tel que $Inv(X(i, j, n, m), n, m) = (i, j)$ quelques soient i et j.
3. On considère une suite de variables $Y_{k,\ell}$ où k varie de 1 à s et k de 1 à t.
4. Proposer un algorithme de linéarisation des indices, c'est-à-dire une fonction $Y(k, \ell, s, t, n, m)$ qui retourne un entier entre $n * m + 1$ et $n * m + s * t$ de telle sorte que pour n, m, s et t fixés, la correspondance soit bijective.
5. Proposer un algorithme $Inv(r, n, m, s, t)$ qui étant donné un entier r entre 1 et $n * m + s * t$ retourne
   - si $r \leq n * m$, un couple (i, j) tel que $Inv(X(i, j, n, m), n, m, r, s) = (i, j)$ quelques soient i et j.
   - sinon, un couple (k, ℓ) tel que $Inv(Y(k, \ell, n, m, r, s), n, m, r, s) = (k, \ell)$ quelques soient k et ℓ.

Exercice 2. *(Codage Simple)*
(3-COLOR)

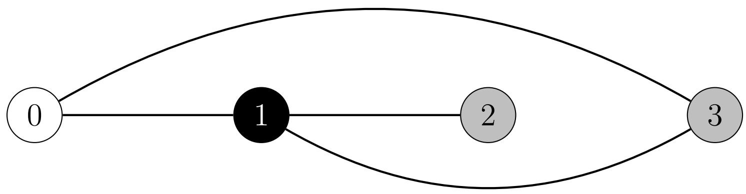
Un graphe fini est un objet (qui sera étudié plus tard dans votre scolarité) composé d'une ensemble fini V de sommets et d'un ensemble d'arêtes E, sachant que chaque arête est une paire u, v où u et v sont deux sommets distincts.

On peut, par exemple, prendre $V = \{0, 1, 2, 3\}$ et $E = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}\}$. On représente souvent un graphe fini à l'aide d'un dessin où les sommets sont représentés par des ronds et une arête par des traits entre les deux sommets qu'elle contient. Par exemple, on dessinerait ici :

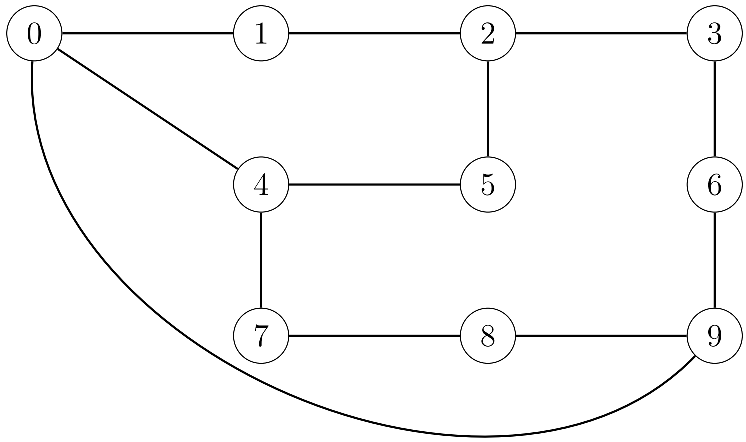


1. Dessiner le graphe où $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{\{0, 1\}, \{0, 3\}, \{0, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}$.

2. Le problème 3-COLOR est le suivant : étant donné un graphe fini, est-il possible de colorier les sommets avec trois couleurs (chaque sommet a exactement une couleur) de telle sorte que deux sommets voisins (relié par une arête) n'aient jamais la même couleur ? Par exemple, le graphe ci-dessous peut être coloré (avec blanc, noir, gris), par exemple comme ceci :



3. Dessiner un graphe à 4 sommets qui ne soit pas 3-coloriable.
4. Proposer un 3-coloriage pour le graphe suivant :



5. Le problème 3-COLOR est NP-complet. On va proposer un codage SAT. On considère les variables B_i (pour bleu), R_i pour R, et J_i pour jaune ayant pour objectif respectif de coder quels sommets sont bleus, rouges et ou jaunes. Par exemple, si la variable B_3 est à vrai, cela veut dire que le sommet i est bleu. On supposera que les sommets sont numérotés de 0 à $n-1$. Combien a-t-on de variables en tout ici ? (en fonction de n).
6. Donner la sémantique, en français, de la formule $B_2 \to \neg J_2$.
7. Donner un formule logique ϕ_i codant que le sommet i ne peut pas être de deux couleurs à la fois.
8. Donner un formule logique ψ_i codant que le sommet i a au moins une couleur.
9. Donner une formule $\rho_{i,j}$ codant que deux sommet i et j n'ont pas la même couleur.
10. On appelle E l'ensemble des arête du graphe. En utilisant les formules ρ, ψ, et ϕ, donner un codage SAT du problème 3-COLOR.
11. Le problème 2-COLOR est le même que 3-COLOR sauf que l'on dispose que deux couleur. Décrire (on ne demande pas l'écrire précisément, juste de donner le principe) un algorithme efficace (qui ne va pas teste énormément de possibilités) pour le problème 2-COLOR.

Exercice 3. Quel fichier `.cnf` correspond au codage de la formule suivante ?

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_6) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

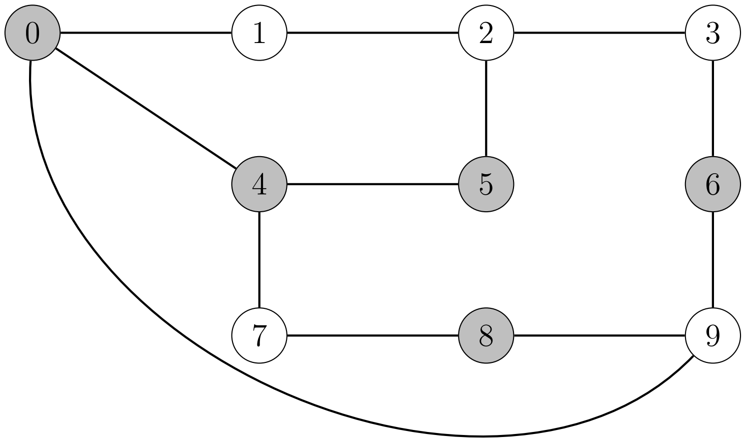
Exercice 4. Appliquer l'algorithme pour 2-SAT à la formule suivante pour décider si elle est satisfiable.

$$x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee x_5) \wedge (x_5 \vee \neg x_6) \wedge (x_4 \vee x_6)$$

Exercice 5. *(Dominating/cover Set)*

La notion de graphe fini a été vue dans l'exercice précédent. Dans un graphe fini (V, E), un ensemble dominant est un sous-ensemble D de V (donc de sommets) tel que tout sommet qui n'est pas dans D est relié par une arête à un sommet de D. On dit aussi que tout sommet qui n'est pas dans D est voisin d'un sommet de D.

Pour tout graphe V est un ensemble dominant par définition. Sur l'exemple ci-dessous, $D = \{0, 4, 5, 6, 8\}$ est un ensemble dominant, car tous les sommets qui ne sont pas dans D sont relié à un sommet de D : 1 est relié à 0, 2 est relié à 5, 3 est relié à 6, 7 est relié à 4 (et à 8), 9 est relié à 6 (et à 8 et à 0),



En revanche, toujours sur le même exemple, l'ensemble $\{0, 4, 6, 8\}$ n'est pas dominant car le sommet 2 n'est relié à aucun sommet de cet ensemble.

Le problème DOMINATING-SET (lié à de nombreux problèmes d'optimisation de couverture réseau par exemple) est le suivant :

Données : un graphe fini, un entier k,

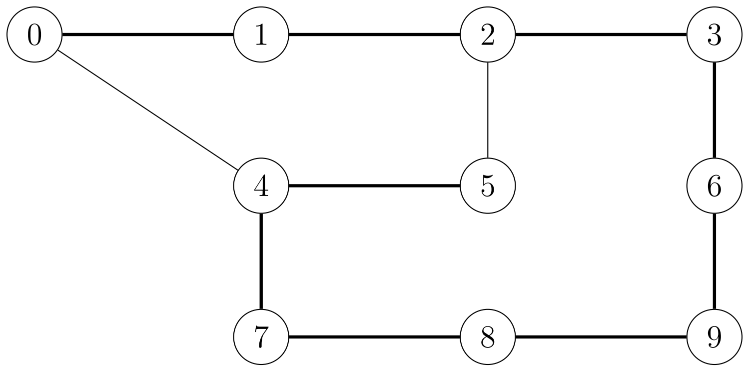
Réponse : Vrai s'il existe un ensemble dominant avec moins de k-sommet, Faux sinon.

1. Dans l'exemple donné ci-avant, quel est la réponse au problème DOMINATING-SET avec $k = 4$? avec $k = 3$?
2. Le problème DOMINATING-SET est NP-complet. Proposer un codage SAT pour le résoudre.

Exercice 6. *(Codage Chemin Hamiltonien)*

La notion de graphe fini a été vue dans les exercices précédents. Un chemin Hamiltonien dans un graphe est une suite d'arêtes consécutives de telle sorte que chaque sommet apparaît une et une seule fois dans le chemin. Par exemple, dans le graphe ci-dessous, le chemin suivant est hamiltonien.

$$0 - 1 - 2 - 3 - 6 - 9 - 8 - 7 - 4 - 5$$



Le problème de savoir s'il existe une chemin Hamiltonien dans un graphe est NP-complet. Proposer un codage SAT pour ce problème.