SVAM – Master 2 – TD1

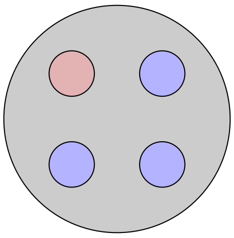
UFR-ST – Université de Franche-Comté

Exercice 1.
On considère ici un petit casse-tête classique : une femme se trouve sur la rive d'une rivière avec un chou, une chèvre et un loup. Elle possède une barque et souhaite apporter le chou et les deux animaux de l'autre côté, avec les contraintes suivantes :

- Ni le chou, ni aucun des animaux n'est capable d'utiliser la barque sans la femme,
- La barque est petite, en plus de la femme, elle ne peut que le chou ou que l'un des animaux,
- Si le loup est laissé seul avec la chèvre, il la mange,
- De même pour la chèvre avec le chou,
- Le loup ne mange pas les choux.

Représenter ce système et ses évolution en utilisant un automate fini, en en cherchant une solution.

Exercice 2.
Le jeu du barman aveugle (historiquement c'est ainsi que s'appelle le jeu) est le suivant : sur un plateau rond tournant 4 jetons identiques sont placés en carré, comme sur la figure ci-dessous. Chaque jeton possède une face bleue et une face rouge.



Le joueur A a les yeux bandés (le barman). Le joueur B place les 4 jetons sur les faces qu'il désire, avec la seule contrainte que tous les jetons ne soient pas sur la même face (couleur). A chaque coup, le joueur B tourne le plateau de 0, 90, 180 ou 270 degrés, selon son choix. Le joueur A ne sait pas de combien le plateau a tourné. Puis le joueur A, retourne autant de jetons qu'il veut (en gardant les yeux bandés). Lorsqu'il a fini, si tous les jetons ont la même couleur, il a gagné.

Montrer que A a une stratégie gagnante, c'est-à-dire que A peut gagner à tous les coups s'il joue bien.

Exercice 3.
On travaille sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. Donner des expressions régulières dont les langages associés sont les langages suivants :

1. Ensemble des mots commençant par a.
2. Ensemble des mots de longueur 3.
3. Ensemble des mots finissant par b.
4. Ensemble des mots commençant par a et finissant par b.
5. Ensemble des mots commençant par a et finissant par a.
6. Ensemble des mots contenant a.

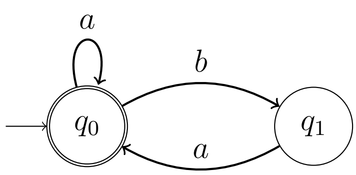
7. Ensemble des mots de longueur un multiple de 3.
8. Ensemble des mots où a n'est jamais immédiatement suivi de b.
9. Ensemble des mots contenant ab et ba.
10. Ensemble des mots où tout a est suivi immédiatement d'un b.

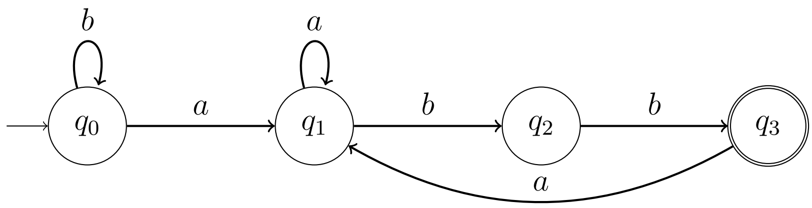
Exercice 4.

On travail sur l'alphabet $\{a, b, c\}$. En utilisant uniquement des langages finis, l'union, le complément et le produit, donner une expression (qui, utilisant l'intersection et le complément ne sera pas régulière), pour le langage $(ab)^*$.

Exercice 5.

Pour chacun des deux automates suivants, donner une expression régulière le reconnaissant, ainsi qu'une phrase en français décrivant le langage.





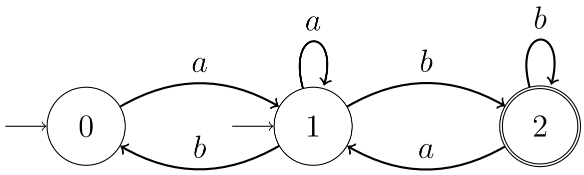
Exercice 6.

Dessiner des automates reconnaissant exactement les langages suivants :

1. L'ensemble des mots contenant aba.
2. L'ensemble des mots (sur $\{a, b\}$) où tout a est suivi immédiatement d'un b.
3. L'ensemble des mots (sur $\{a, b, c\}$) où tout a est suivi (pas nécessairement immédiatement) d'un b.

Exercice 7.

Déterminiser l'automate suivant :



Exercice 8.

Dessiner le produit (états accessibles uniquement) des deux automates de l'exercice 5.

Exercice 9.

Dessiner un automate reconnaissant le complémentaire du langage reconnu par l'automate de l'exercice 7.

Exercice 10.

Donner une expression utilisant des langages finis, les opérations booléennes, l'opérateur ω, le produit, l'étoile, pour les langages suivants (l'alphabet est $\{a, b\}$) :

- L'ensemble des mots infinis qui commencent par a,
- L'ensemble des mots infinis qui contiennent le facteur $aabb$,
- L'ensemble des mots infinis où il n'y a jamais deux a consécutifs.

Exercice 11.

Donner une description claire en français du langage $\{ab, b\}^\omega$.

Exercice 12.

Donner une phrase en français expliquant la sémantique de chacune des formules LTL suivantes.

1. $\psi_1 = a$
2. $\psi_2 = \Box a$
3. $\psi_3 = \Diamond a$
4. $\psi_4 = (a \wedge (a \mathcal{U} b))$
5. $\psi_5 = (b \wedge (b \mathcal{U} a))$
6. $\psi_6 = (b \Rightarrow \circ \Box a)$

Pour chacune de ces formules, dire si les mots $x_1 = abababab a\ldots$, $x_2 = baaaaa\ldots$ et $x_3 = aaaaaaaaa\ldots$ la satisfont.

Exercice 13.

Pour chacune des propriétés suivantes, donner une formule LTL la modélisant.

1. Le mot commence par ab.
2. Si le mot commence par a alors il commence par ab.
3. Le mot ne contient pas de a.
4. Dans le mot, tout a est suivi d'un b.
5. Dans le mot, tout b est précédé d'un a.
6. Dans le mot, il y a au moins un a suivi d'un b.
7. Le mot contient une infinité de a.

Exercice 14.

On considère un immeuble avec 4 niveaux, numérotée de 0 à 3 possédant un ascenseur. A chaque étage il y a un bouton pour appeler l'ascenseur ainsi qu'une porte. On considère les actions suivantes :

- a_i (pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$) signifie que l'ascenseur arrive à l'étage i,
- b_i (pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$) signifie que quelqu'un appuie sur le bouton à l'étage i.
- c_i (pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$) signifie que quelqu'un ouvre la porte à l'étage i.

Coder en LTL les propriétés suivantes [1] :

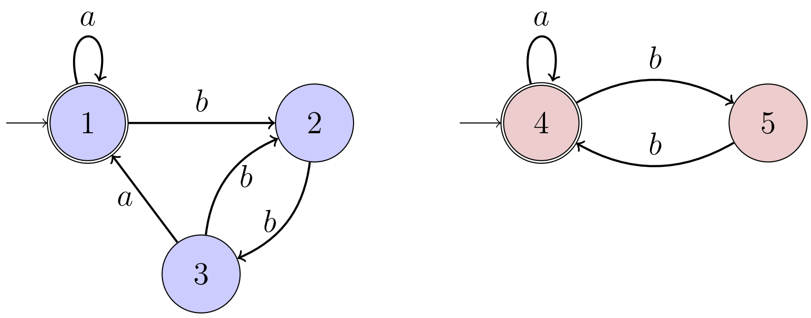
1. *L'ascenseur est équitable : si je l'appelle, il finira par venir.*
2. *L'ascenseur est sûr : si on ouvre la porte c'est que l'ascenseur est à l'étage.*
3. *L'ascenseur finit toujours par revenir au rez-de-chaussée.*
4. *Si l'ascenseur est au rez-de-chaussée, il ne peut aller qu'au premier niveau.*
5. *Si j'appelle l'ascenseur au dernier niveau, il vient immédiatement sans prendre ni laisser descendre personne aux autres étages.*

On admettra pour simplifier que l'ascenseur est toujours à exactement un étage (il ne peut ni être à deux étage à la fois, ni à aucun étage). On suppose aussi que le système n'est pas abandonné, qu'il n'y a pas un moment où plus rien ne se passe (la suite des actions est bien un mot infini).

Exercice 15.

1. Donner des automates de Büchi reconnaissant les langages de l'exercice 10.
2. Quels sont les langages reconnus par les deux automates ci-dessous.

1. Exercice librement inspiré du livre *Principle of Model Checking* de Ch. Baier et J.-P. Katoen.



3. En utilisant la construction du produit vue dans le cours, donner un automate de Büchi reconnaissant l'intersection des langages donnés par les deux automates ci-dessus.

Exercice 16.
Pour les langages définis dans l'exercice 10, dessiner pour chacun un automate de Büchi le reconnaissant.

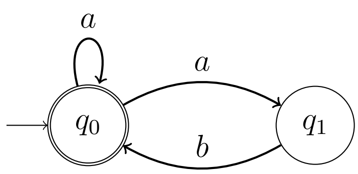
Exercice 17.
Dans cet exercice A désigne un alphabet fini. Pour tout automate $\mathcal{A}$, on note $L_\omega(\mathcal{A})$ le langage de mots infinis qu'il reconnaît, $\mathcal{A}$ étant considéré comme un automate de Büchi. On note aussi $L(\mathcal{A})$ l'ensemble des mots finis qu'il reconnaît, en prenant $\mathcal{A}$ comme un automate fini *classique*.

Si u est un mot infini, on appelle préfixe de u tout mot fini v de A^* tel que $u \in vA^\omega$. Enfin, si L est un langage de mots finis, alors on pose, par définition,

$$\overline{L} = \{u \in A^\omega \mid u \text{ a une infinité de préfixe dans } L\}$$

1. Que valent $\overline{a^*}$, $\overline{(ab)^*}$, $\overline{a^*b}$, et $\overline{\{a,b\}^*a}$?
2. Soit x un mot fini. Montrer que $\overline{x^*} = x^\omega$.
3. Soit K un langage fini de mots finis. Montrer que $\overline{K} = \emptyset$.
4. Montrer que si $\mathcal{A}$ est un automate déterministe, alors $L_\omega(\mathcal{A}) = \overline{L(\mathcal{A})}$.
5. En utilisant l'exemple ci-dessous, justifier que la proposition de la question précédente n'est plus vraie si l'on enlève l'hypothèse *déterministe*.
6. Soit X un langage de mots infinis. Montrer qu'il existe un automate déterministe $\mathcal{A}$ tel que $L_\omega(\mathcal{A}) = X$ ssi il existe un langage régulier de mots finis K tel que $X = \overline{K}$.
7. Montrer que A^*b^ω ne peut pas être reconnu par un automate de Büchi déterministe.

Exercice 18.
On considère le système modélisé par l'automate de Büchi suivant :



En utilisant la technique du Model-Checking, montrer que ce système vérifie les deux formules $\Box \diamond a$ et $\Box(b \Rightarrow \circ a)$.