

# DUT d'informatique.

## APP : séances de ski



### 1 Objectifs pédagogiques de l'APP

A l'issue de cet APP, vous devrez savoir étudier une fonction à deux variables, et en particulier les points suivants :

- calculer des dérivées partielles premières et secondes
- déterminer et interpréter le gradient en un point donné.
- déterminer les points critiques.
- caractériser les points critiques à l'aide de la matrice hessienne.
- maîtriser des outils de mesure pour caractériser les fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 2 Présentation du problème

#### 2.1 Problématique

Les pistes de ski diffèrent notamment par leur longueur, leur relief, leur dénivelé. L'objectif de cet atelier est de modéliser la trajectoire d'un skieur soumis aux différents paramètres d'une piste de ski.

##### 1. Modélisation

Une piste de ski peut être modélisée par une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , fonction donc à deux variables  $(x, y)$  qui correspondent aux coordonnées cartésiennes (liées à la situation géographique) et  $z = f(x, y)$  correspond alors à l'altitude.

La notion de pente est "bien connue" pour des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On se propose de généraliser cette notion à des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

##### 2. Questionnement

- Comment peut-on trouver les plats, les creux, les bosses d'une piste ?
- Qu'entend-t-on par courbe de niveau ?
- Comment transposer les notions d'analyse d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  à des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  ?
- Comment déterminer alors la pente en un point  $(x_0, y_0)$  donné ? Quel sens lui donner ?

3. **Pré-requis** : étude de fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Maximum, minimum, interprétations géométriques de la dérivée.

##### 4. Documents

- Cours sur le gradient, courbe de niveau, Hessien, minima et maxima de fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Exercices d'apprentissage sur les fonctions à plusieurs variables.

## 5. Déroulement des séances de ski : 6 séances de 1.5 heures

- Les séances sont souvent découpées en temps de travail individuel et en temps de travail de groupe. Il est important que la phase de travail individuel se déroule en silence.
- Un travail personnel est proposé en inter-séances. Ce travail est indispensable pour la préparation de la séance suivante.

### Le Travail individuel

Ce n'est pas le groupe qui doit devenir compétent mais bien chacun de ses membres !

- Le travail collectif est certes important mais l'objectif de cette activité est de rendre chaque étudiant compétent. Le travail réalisé entre les séances de groupe est une manière efficace et simple de vous préparer aux examens.
- Chaque étudiant est amené à présenter sa solution individuelle aux autres membres du groupe. Il est donc très important que chacun de vous fasse sa part de travail.

## 2.2 Présentation des pistes de ski

Voici les équations de différentes pistes de ski. Le skieur part d'un point de coordonnées  $(0, y_0, z_0 = f(0, y_0))$  espérant atteindre un point de coordonnées  $(x_1 = 100, y_1, f(100, y_1))$ .

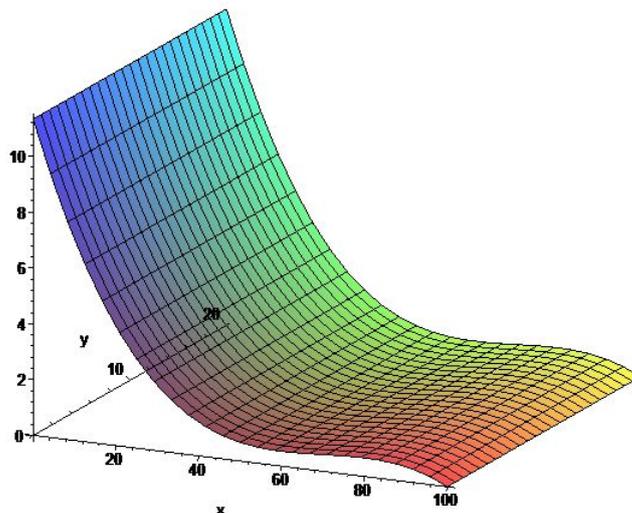
$$p_1 : [0, 100] \times [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \frac{1}{10000} \left( -\frac{x^3}{3} + 70x^2 - 4800x + \frac{340000}{3} \right)$$

$$p_2 : [0, 100] \times [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \frac{1}{10000} \left( -\frac{x^3}{3} + 70x^2 - 4800x + \frac{340000}{3} \right) + \frac{y^2}{20} - y + 20$$

$$p_3 : [0, 100] \times [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \frac{1}{120000} \left( -\frac{x^3}{3} + 70x^2 - 4800x + \frac{340000}{3} \right) \left( \frac{y^2}{20} - y + 20 \right)$$

$$p_4 : [0, 100] \times [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto -\frac{1}{10000}x^3 - \frac{3}{20000}(-120 - 2y)x^2 + \frac{3}{125}(-2y - 40)x + 16 + \frac{9}{5}y$$

Voici par exemple, une représentation graphique de la fonction  $p_1$  pouvant modéliser une piste de ski : l'axe  $y$  est orienté vers l'intérieur de la feuille.



## Séance 1 : Flocon

- Compétences : interprétation de tangente, pente, croissance, décroissance, recherche d'extréma, dérivées secondes;
- Réalisation : étudier les lignes de départ des pistes de ski.

### Travail individuel : 30 minutes

1. Lire le cours p.1, p.2, p.3, p.4 et p.8.
2. Déterminez, pour  $y = 0$ ,  $y = 10$  et  $y = 20$ , la fonction représentant le profil des pistes  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ .
3. Déterminez et étudiez la ligne de départ de chaque piste de ski.

### Travail de groupe : 50 minutes

1. Comparez vos résultats.
2. Calculez les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x^2 + x + 2 \quad (x, y) \mapsto x^2y^2 + xy + 2$$

3. Travail à rendre : étude et représentation graphique des différents profils des pistes et de leur(s) ligne(s) de crêtes.

### Travail inter-séance :

1. Relire le cours p.3 et p.4
2. Calculez les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes :

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x^2y + xy + 2$$

$$i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto e^{x^2+xy+2}$$

3. Pour la prochaine séance, apportez un bol et un compas !!!

## Séance 2 : Première étoile

- Compétences : se familiariser avec des fonctions  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , coupe des lignes de niveau selon une direction ; calcul et interprétation du gradient (cas particulier du gradient nul), notion de plan tangent ;
- Réalisation : déterminer les gradients associés à des courbes et savoir interpréter ce gradient.

### Travail de groupe : 15 minutes

Comparez vos résultats concernant le travail réalisé en inter-séance.

Calculez les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction associée à la piste  $p_1$ . En déduire le gradient de  $p_1$ .

### Le bol

On considère la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{l} [-10; 10] \times [-10; 10] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \end{array} .$$

Une représentation graphique de cette fonction peut être modélisée par le bol que vous avez en main (naturellement, vous ne disposez que d'une représentation graphique tronquée de  $f$ , sinon, il serait délicat de l'utiliser).

#### 1. Travail individuel : 15 minutes

- (a) En utilisant le bol, dessinez les courbes de niveau de  $f$ .
- (b) Calculez le gradient de  $f$  en un point  $(x_0, y_0, z_0)$  de votre bol.
- (c) Dessinez sur le graphe précédent le gradient ainsi obtenu.

#### 2. Travail de groupe : 15 minutes

- (a) Comparez vos résultats.
- (b) Que peut-on dire de ce gradient par rapport à la courbe de niveau choisie ? Le démontrer.
- (c) Que vous indique le gradient ?
- (d) Y-a-t-il des points de  $[-10; 10] \times [-10; 10]$  où le gradient prend des valeurs particulières ? Qu'en pensez-vous ?

### Travail à rendre :

1. Sur une feuille, dessiner les courbes de niveaux associée au bol et représenter dessus le gradient aux points de coordonnées  $(2, 3)$  et  $(-2, 3)$ .
2. Sur une feuille, rendre les courbes de niveaux associées à la première piste  $p_1$ . Donner la direction du gradient pour cette piste.

**Travail inter-séance :** Déterminez et représentez les courbes de niveau  $k = 0$ ,  $k = 1$  et  $k = 2$  de la fonction :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto y - x^2 \end{array}$$

Représentez sur ce même graphe le gradient aux points  $(0, 0)$ ,  $(2, 5)$  et  $(3, 11)$ .

## Séance 3 : Deuxième étoile

- Compétences : fonctions  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , coupe des lignes de niveau selon une direction; calcul et interprétation du gradient (cas particulier du gradient nul), notion de plan tangent ;
- Réalisation : Courbes de niveau associées à des fonctions. Interprétation du gradient.

Voici 6 représentations graphiques de fonctions ainsi que 6 rep. des courbes de niveau associées à ces fonctions.

**Travail individuel : 10 minutes** déterminez les figures qui correspondent aux courbes de niveau données.

**Travail de groupe : 10 minutes** comparez vos résultats puis proposez une solution unique.

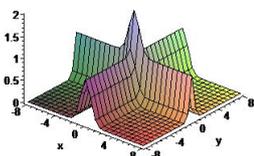


Figure 1

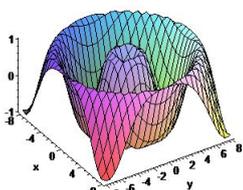


Figure 2

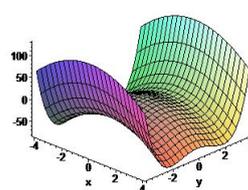


Figure 3

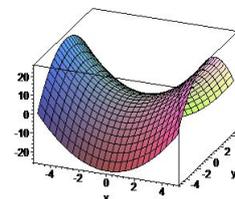


Figure 4

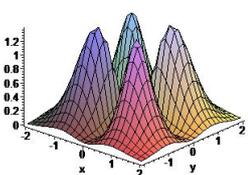


Figure 5

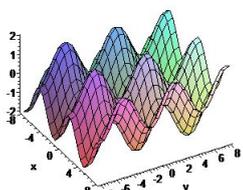
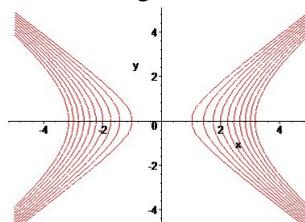
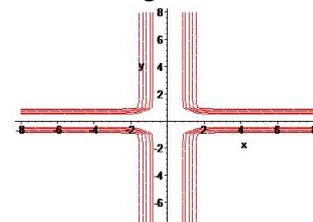


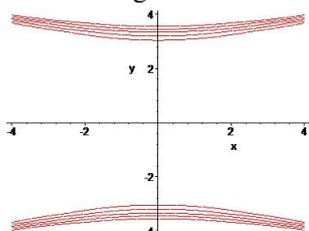
Figure 6



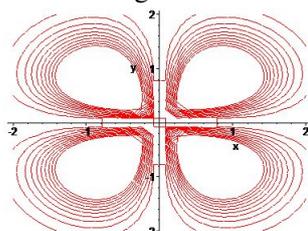
$$z = x^2 - y^2$$



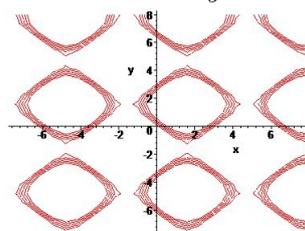
$$z = e^{-x^2} + e^{-4y^2}$$



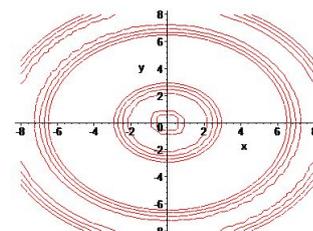
$$z = y^4 - 8y^2 - 4x^2$$



$$z = 15x^2y^2e^{-x^2-y^2}/(x^2+y^2)$$



$$z = \sin(x) + \sin(y)$$



$$z = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$$

### Travail en groupe : 40 minutes

On considère l'application  $f(x, y) = xy$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

1. Représentez les courbes de niveau  $f(x, y) = k$ , pour  $k = -3, -1, 0, 2, 3$ . On pourra utiliser un logiciel de représentation de courbes. Le niveau 2, en gras, sera à rendre.
2. Déterminez l'équation de la tangente à la courbe  $f(x, y) = 2$  au point  $(4, 1/2)$ .
3. Calculez le gradient de  $f$  au point  $A = (4, 1/2)$ . Montrez que ce vecteur est normal à la courbe de niveau contenant  $A$  et qu'il est dirigé dans le sens de la pente croissante.
4. En déduire une équation de la tangente à cette courbe de niveau en  $A$ .

### Travail à rendre : 40 minutes

1. Donner les correspondances entre les figures et leurs lignes de niveau.
2. Calcul le gradient de chacune des pistes  $p_2, p_3$  et  $p_4$ .
3. Présenter l'exercice précédent pour le niveau  $k = 2$ .

### Travail inter-séance :

- Lire le cours p.4, p.5, p.6 et p.7
- Calculez les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :
  - a)  $x^2(x + y)$
  - b)  $\cos(xy)$
  - c)  $x^2 + y$

## Séance 4 : Étoile de Bronze

- Compétences : classification des points critiques, matrice hessienne, dérivation croisée ;
- Réalisation : détermination de points critiques.

### Travail en groupe : toute la séance

1. Comparez vos résultats concernant le calcul des dérivées secondes sur le travail de l'inter-séance. Joindre votre synthèse dans le travail à rendre.
2. Discutez de la procédure à adopter pour obtenir et classer les points critiques d'une fonction.
3. Déterminez et caractérisez les points critiques des fonctions suivantes :
  - a)  $3xy - x^3 - y^3$
  - b)  $-2(x - y)^2 + x^4 + y^4$
4. On considère un parallélépipède de surface  $S$  fixée. On désigne par  $x, y, z$  les longueurs des côtés du parallélépipède.
  - (a) Calculez l'aire et le volume de ce parallélépipède.
  - (b) Trouvez le maximum atteint par le volume de ce parallélépipède sachant que sa surface est  $S$ .

### Travail à rendre :

- Feuille sur l'exercice inter-séance.
- Points critiques et classification des questions 3 et 4.

### Travail inter-séance :

Déterminez les dérivées partielles d'ordre 2 des pistes  $p_2, p_3$  et  $p_4$ .

## Séance 5 : Etoile d'or

- Compétences : étude de fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$
- Réalisation : étude des pistes de skis.

### Travail en groupe : 10 minutes

Comparez vos résultats concernant le calcul des dérivées partielles d'ordre 2 des pistes.

### Travail individuel : 60 minutes

1. Déterminez les points critiques des différentes pistes.
2. Classez les points critiques.

### Travail à rendre :

Points critiques et classification de ces points pour les 4 pistes.

## Séance 6 : Flèche

- Compétences : étude de fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$
- Réalisation : une synthèse du travail précédent

L'objectif de cette séance est d'obtenir la trajectoire d'un skieur lorsque ce dernier subit la pente de la piste. On suppose que le skieur part d'un point de coordonnées  $(0, y_0, p_i(x_0, y_0))$ .

Vous disposez des courbes de niveau associées à chaque piste.

### Travail individuel : 10 minutes

Associez à chaque piste les courbes de niveau correspondantes.

### Travail en groupe : 60 minutes

1. Synthèse du travail individuel.
2. Dessinez les trajectoires d'un skieur lorsque ce dernier part des points de coordonnées  $(0, 0, p_1(0, 0))$ ,  $(0, 10, p_1(0, 10))$ ,  $(0, 20, p_i(0, 20))$  pour chacune des pistes de ski  $p_i$ ,  $i = 1..4$ .

### Travail à rendre :

- Représentation des différentes trajectoires.
- Justification et analyse de ces différentes trajectoires.

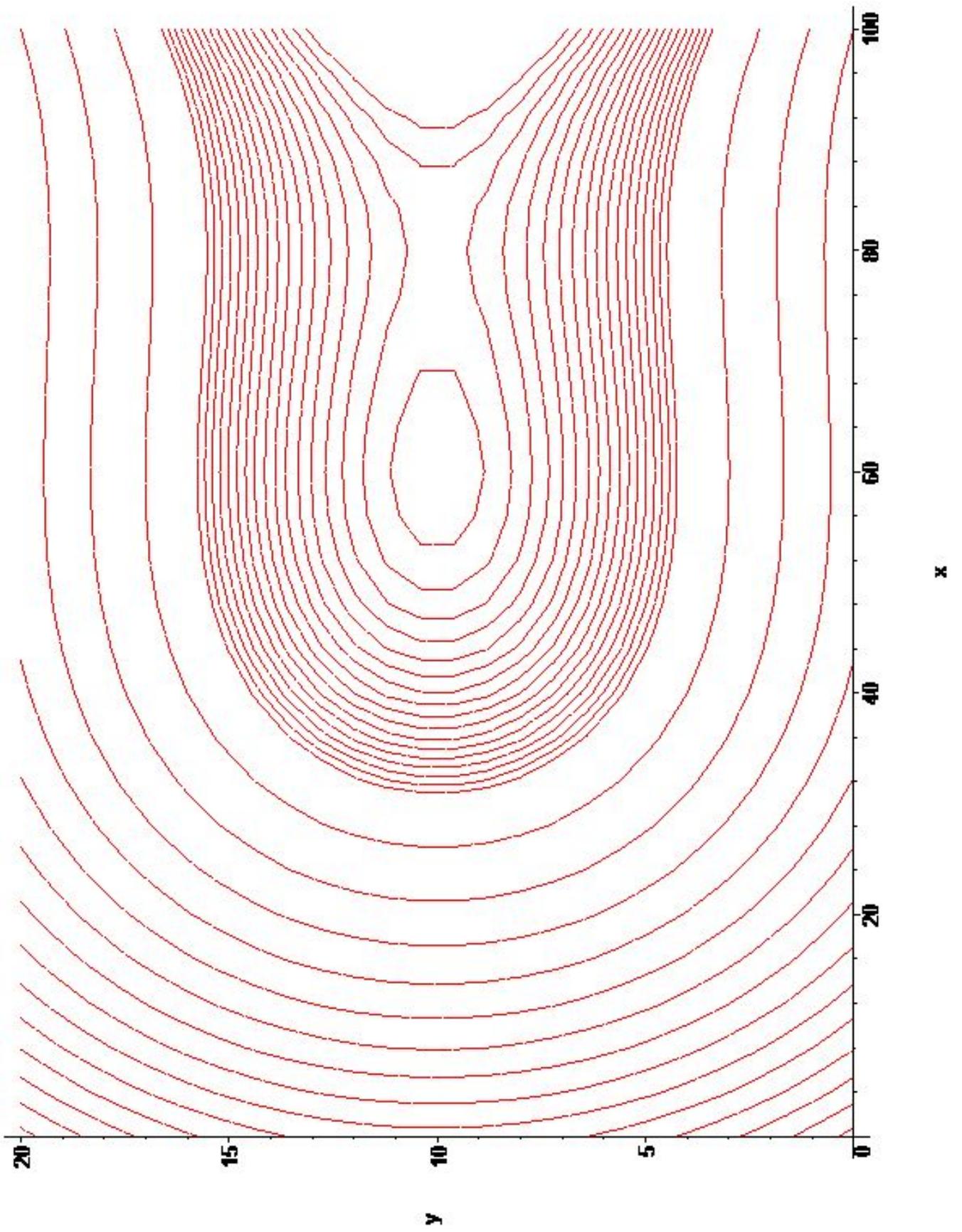


FIGURE 1 – Courbe de niveau 1

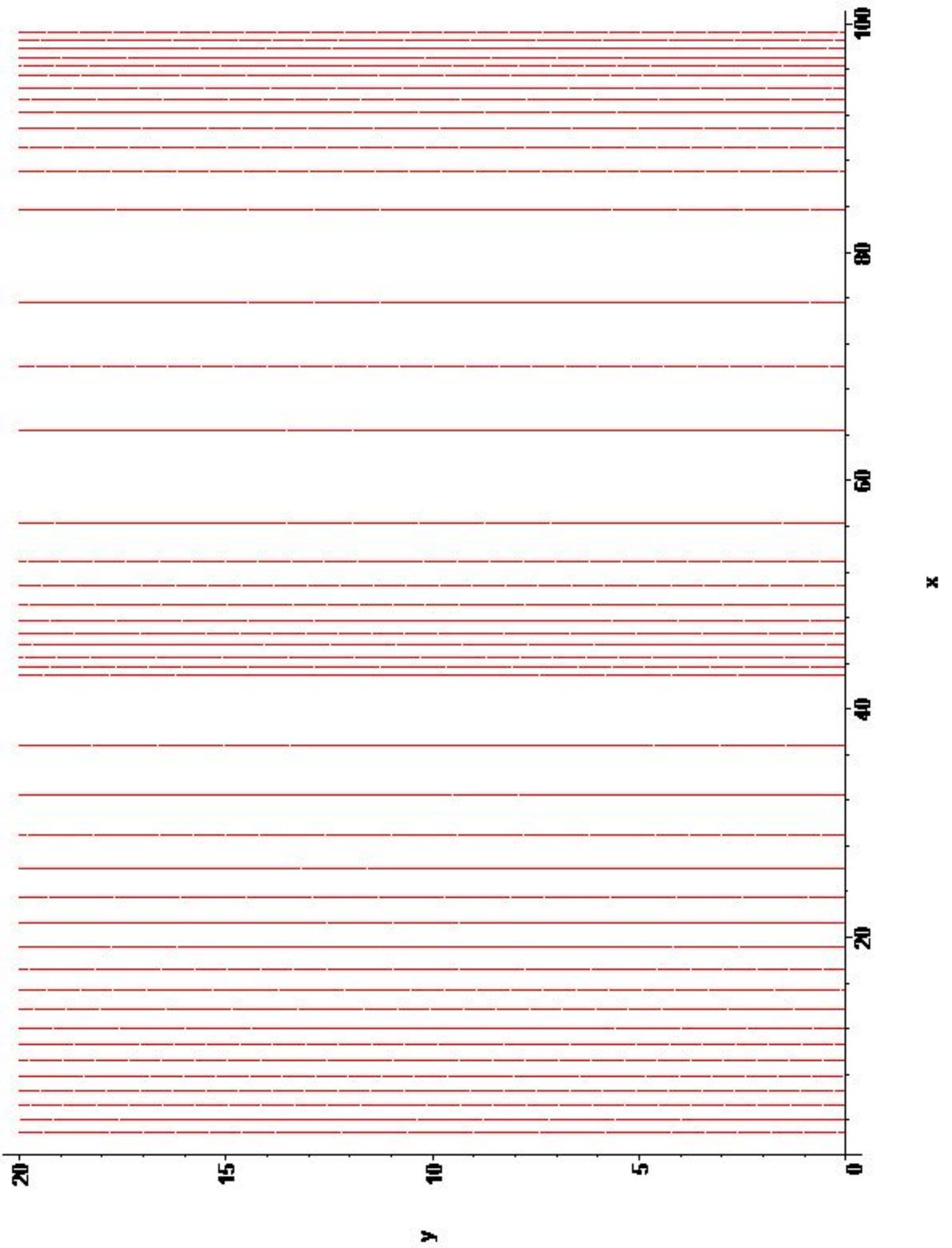


FIGURE 2 – Courbe de niveau 2

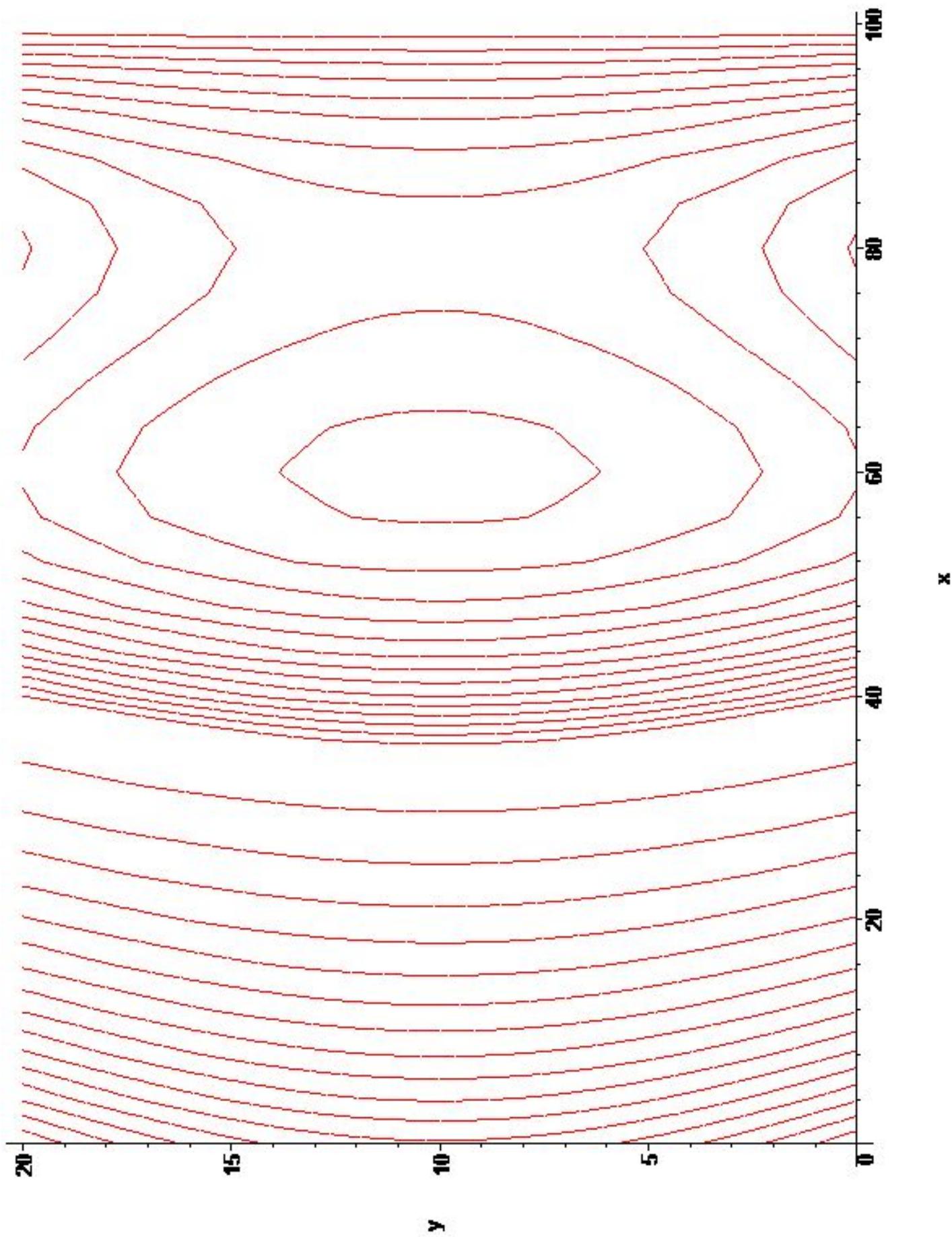


FIGURE 3 – Courbe de niveau 3

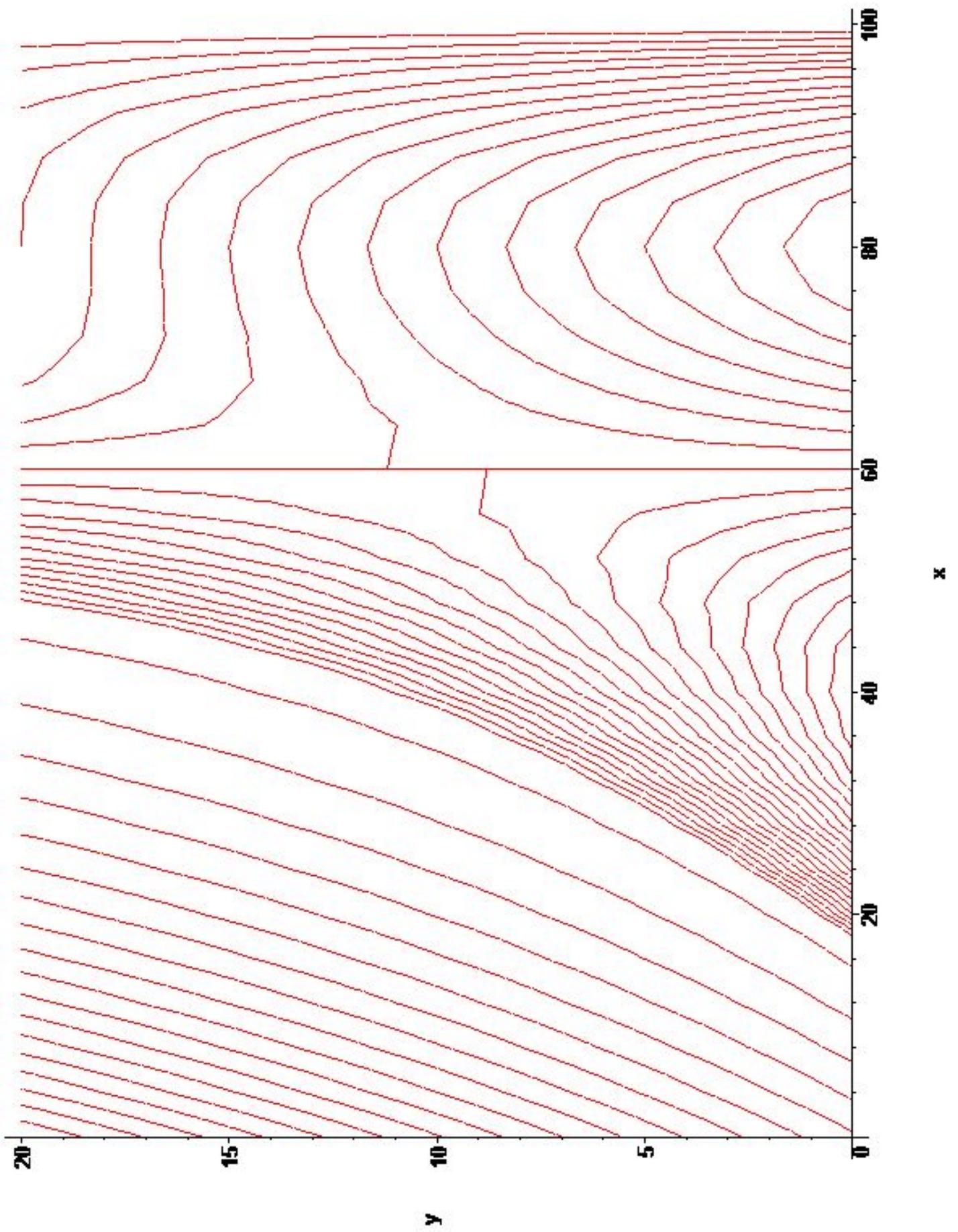


FIGURE 4 – Courbe de niveau 4

### 3 Organisation du travail de groupe

Notez ici la répartition des rôles que vous avez choisie :

Animateur :	
Gestionnaire du temps :	
Scribe :	
Secrétaire :	

#### Bilan du travail de groupe

1. Indiquer ici un ou deux éléments positifs du fonctionnement du groupe :

—  
—

2. Indiquer ici un ou deux éléments négatifs du fonctionnement du groupe :

—  
—

3. Indiquer ici un ou deux éléments que vous tenterez de corriger/améliorer pour les prochains séances

—  
—

4. Commentaire sur chacun des points

- Ambiance :
- Production du groupe :
- Implication de chacun :
- Qualité des échanges :

5. Travail individuel :

- avez-vous respecté la phase de travail individuel ?
- est-ce que chacun a travaillé ? si oui/non, quelles ont été les conséquences de l'absence/présence de travail individuel ?

6. Organisation :

- avez-vous attribué des rôles ? les avez-vous respectés ? ont-ils été utiles ? si non, pourquoi ne l'avez-vous pas fait ?
- que pensez-vous de votre organisation en groupe ?
- avez-vous gardé une trace écrite de votre travail de groupe ?

7. Autres remarques :

## 4 Présentation de l'apprentissage par problème - APP

L'apprentissage par problème (APP), c'est quoi ?

Dans l'APP, l'apprentissage est basé sur la résolution collective d'un problème concret. Il s'agit de confronter un groupe d'étudiants à une situation-problème dans le but d'acquérir solidement les connaissances, les savoir-faire ou les attitudes nécessaires à l'exercice du métier d'ingénieur. Dans le cadre des APP, les étudiants se mettent dans la peau d'un ingénieur face à un problème réel.

### Objectifs pédagogiques

Les objectifs des séquences APP sont à deux niveaux : vous transmettre d'une part des réflexes méthodologiques liés à la discipline "Mathématiques pour l'ingénieur"; et d'autre part des réflexes plus généraux pour vous initier à la gestion de projet. Ces derniers vous seront particulièrement utiles dans le milieu professionnel, qui nécessite généralement un travail en groupe coopératif pour mener à bien les projets.

### Objectifs pédagogiques transversaux (gestion de projets en groupes)

- Savoir travailler en groupe de manière coopérative (animation, coordination, communication, respect mutuel, bonne humeur...)
- Savoir rechercher des informations (principalement dans le poly de cours, à la bibliothèque, sur internet...)
- Développer l'autonomie, la motivation et la prise d'initiative
- Renforcer la capacité à faire des choix et à évaluer les risques
- Savoir gérer le temps et les échéances
- Il y a un troisième niveau : l'auto-réflexion. Cela consiste à être capable d'analyser, de comprendre et d'évaluer son propre processus d'apprentissage et de résolution de problème. Le but étant d'être capable de s'améliorer continuellement en tirant les leçons des expériences vécues.

### Méthodologie

Les caractéristiques de l'APP sont les suivantes :

- Défi complexe mais raisonnable (sans solution unique)
- Groupe de 5-6 étudiants nécessitant une organisation interne pour un travail efficace
- Les étudiants sont actifs et preneurs d'initiatives. Les enseignants sont des tuteurs, c'est-à-dire qu'ils accompagnent l'évolution du projet.
- L'objectif visé est de vous habituer à travailler de manière individuelle simultanément avec le traitement de la situation-problème qui se fera en groupe sous la supervision de votre tuteur.

### Organisation type d'un APP

#### Le travail en groupe

Une des caractéristiques de l'APP est d'apprendre aux étudiants à travailler en groupe. En particulier, nous souhaitons que vous formiez un groupe d'apprentissage coopératif qui réunit un certain nombre de valeurs :

- l'esprit de solidarité
- l'écoute et le respect mutuel
- le respect des consignes de travail et des horaires
- une bonne ambiance
- l'implication de tous

L'objectif est d'optimiser la participation active de chaque étudiant au sein du groupe. Individuellement, chacun d'entre vous contribue selon son style et ses ressources à la progression efficace du groupe et au climat constructif des échanges. C'est à chaque membre du groupe d'être attentif au respect de ces règles et à l'implication de tous. Pour que le travail de groupe soit efficace, il est nécessaire de l'organiser ! Ainsi, nous vous recommandons fortement d'attribuer des rôles spécifiques qui assureront le bon fonctionnement du groupe. Par ailleurs, lors de vos échanges, nous vous suggérons d'utiliser la méthode du "Brainstorming".

## **Organisation du travail de groupe**

### **Différents rôles pour organiser le travail**

Pour faciliter le bon fonctionnement du groupe, il vous est fortement conseillé de vous organiser en attribuant au sein du groupe les 4 rôles spécifiques décrits ci-après.

#### **L'animateur**

1. s'assure que le groupe suit les étapes prévues
2. Veille à ce que le contenu de la discussion soit noté par le secrétaire
3. Anime la discussion :
4. distribue la parole, suscite /sollicite la participation ou modère les interventions
5. amène le groupe à clarifier les idées développées
6. réalise des synthèses au besoin

#### **Gestionnaire du temps**

1. s'assure du respect du timing pour chaque étape et du timing général.
2. Il informe régulièrement le groupe du temps qui reste.

#### **Scribe**

1. Note au tableau l'essentiel des échanges (support et mémoire de la discussion du groupe)
2. Ne filtre pas les informations notées
3. Organise le tableau en fonction des étapes (de manière à garder la trace de toute la réflexion ? ne pas effacer).

#### **Secrétaire**

1. Garde une trace écrite et complète de la production du groupe
2. Transmet cette trace par email à tous les membres du groupe.

#### **Le rôle du tuteur**

1. Guide le groupe : l'empêche de s'égarer et l'incite à aller plus loin...
2. Il connaît la réponse au problème mais c'est à vous, étudiants, de faire le travail. Vous ne serez donc pas étonné qu'il refuse parfois de répondre directement aux questions que vous vous posez. Ce sera le cas notamment s'il estime que cette question n'a pas été assez débattue préalablement au sein du groupe.