

# L3 informatique, Sécurité Appliquée Cryptographie Asymétrique

*Jean-François* COUCHOT

Université de Franche-Comté, UFR-ST



# Plan



Principe de la cryptographie asymétrique

RSA : Rivest, Shamir, Adelman





## Principe de la cryptographie asymétrique

RSA : Rivest, Shamir, Adelman



# Deux clefs : une publique $K_A$ et une privée $K_A^{-1}$

## Deux clefs pour deux rôles

En *cryptographie asymétrique* ou *cryptographie à clef publique*, Alice a un couple de clefs  $(K_A, K_A^{-1})$  :

- ▶  $K_A$ , sa clef publique qu'elle distribue
- ▶  $K_A^{-1}$ , sa clef privée qu'elle conserve

Il existe deux utilisations principales de ces clefs :

- ▶ Le chiffrement : c'est l'expéditeur qui chiffre avec la clef publique du destinataire
- ▶ La signature : c'est le signataire qui encode avec sa clef privée





## Chiffrement

- ▶ Bob veut envoyer un message  $M$  à Alice
- ▶ Il récupère  $K_A$ , la clef publique d'Alice
- ▶ Il envoie  $C = E(M, K_A)$  à Alice
- ▶ Alice utilise alors sa clef privée  $K_A^{-1}$
- ▶ Elle calcule  $D(C, K_A^{-1}) = M$

Propriété obtenue : confidentialité





## Signature

- ▶ Alice veut signer un message  $M$  pour Bob
- ▶ Elle calcule  $S = D(H(M), K_A^{-1})$ , avec  $H(M)$  empreinte de  $M$
- ▶ Elle envoie  $M$  et  $S$  à Bob
- ▶ Bob récupère  $K_A$ , la clef publique d'Alice
- ▶ Il calcule  $E(S, K_A)$  et  $H(M)$  et vérifie que les résultats sont égaux

Propriété obtenue : authentification



# Cryptographie symétrique vs asymétrique



## Comparaison

- ▶ Cryptographie symétrique
    - ▶ Une clef secrète  $K_{AB}$
    - 😊 Chiffrement rapide
    - ☹ Une clef par couple d'acteurs
  - ▶ Cryptographie asymétrique
    - ▶ Une clef publique  $K_A$
    - ▶ Une clef privée  $K_A^{-1}$
    - 😊 Un couple de clefs par acteur
    - ☹ Chiffrement lent
- On utilise le chiffrement asymétrique pour partager une clef de chiffrement symétrique secrète





## Principe de la cryptographie asymétrique

### RSA : Rivest, Shamir, Adelman

- Généralités et rappels

- Chiffre RSA en 4 étapes

- Analyse des points clefs du chiffre

- Mise en pratique de RSA







## Principe de la cryptographie asymétrique

### RSA : Rivest, Shamir, Adelman

- Généralités et rappels

- Chiffre RSA en 4 étapes

- Analyse des points clefs du chiffre

- Mise en pratique de RSA





## Historique de RSA

- ▶ 1977 : naissance de l'algorithme<sup>1</sup> par Rivest, Shamir, Adelman
- ▶ 1983 : breveté aux USA jusqu'en 2000
- ▶ mais 1973 : algorithme équivalent trouvé par Clifford Cocks (British intelligence agency Government Communications Headquarters) mais classifié secret jusqu'en 1997

---

1. Rivest, R. L., Shamir, A., & Adleman, L. (1978). A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. Communications of the ACM, 21(2), 120-126.

# Fondements théoriques : arithmétique



- ▶ il est possible de trouver trois très grands nombres entiers positifs  $e$ ,  $d$  et  $n$  tq. pour tout message  $m$ ,  $0 \leq m \leq n$

$$(m^e)^d \equiv m \pmod{n} \quad (1)$$

- ▶ et connaissant  $e$  et  $n$  (et même  $m$ ), il est très difficile de trouver  $d$



# Rappels d'arithmétique, diviseur, pgcd

Division euclidienne,  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$

$\exists q \in \mathbb{N}$  (quotient) et  $r \in \mathbb{N}$  (reste) uniques, tq.  $a = b \times q + r$  et  $r < b$

Plus grand diviseur commun  $\text{pgcd}(a, b)$ ,  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $b \in \mathbb{N}$

$\text{pgcd}(a, b)$  est l'entier naturel qui vérifie :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{pgcd}(a, b) | a \text{ et } \text{pgcd}(a, b) | b; \\ \bullet d | a \text{ et } d | b, \text{ alors } d | \text{pgcd}(a, b). \end{array} \right\} \text{ en particulier } \text{pgcd}(a, 0) = a$$

Ex. :  $550 = 2 \times 5^2 \times 11$  et  $1540 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 11 \rightsquigarrow$   
 $\text{pgcd}(550, 1540) = 2 \times 5 \times 11 = 110$

Primalité

- ▶  $p$  est premier s'il n'a que 2 diviseurs, 1 et  $p$
- ▶  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si  $\text{pgcd}(a, b) = 1$

# Euclide, identité de Bézout

Algorithme d'Euclide :  $\text{pgcd}(a, b)$ ,  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $b \in \mathbb{N}$

- ▶ Si  $a = bq_1 + r_1$ ,  $0 \leq r_1 < b$ , alors  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1)$ 
  - ▶ A prouver : «  $d$  divise  $a$  et  $b$  »  $\Leftrightarrow$  «  $d$  divise  $b$  et  $r_1$  »
- ▶ Si  $r_1 = 0$  on a  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, 0) = b$ , fini
- ▶ Sinon, division  $b = r_1q_2 + r_2$ ,  $0 \leq r_2 < r_1$ , et  $\text{pgcd}(b, r_1) = \text{pgcd}(r_1, r_2) \dots$
- ▶ Ex.  $\text{pgcd}(1540, 550)$ ?  $1540 = 550 \cdot 2 + 440$ ,  $550 = 440 \cdot 1 + 110$ ,  
 $440 = 110 \cdot 4 + 0 \rightsquigarrow \text{pgcd}(1540, 550) = 110$

Identité de Bézout pour  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{N}^*$

Il existe  $x$  et  $y$  entiers tq.  $a \cdot x + b \cdot y = d$ , avec  $d = \text{pgcd}(a, b)$

- ▶ Preuve : appliquer Euclide et remonter

Trouver  $x$  et  $y$  tq  $29x + 72y = 1$

- ▶ Calcul de  $\text{pgcd}(72, 29) = 1$  :

$$72 = 29 \times 2 + 14$$

$$29 = 14 \times 2 + 1$$

$$14 = 1 \times 14 + 0$$

- ▶ "On remonte" à partir de

$$1 = \text{pgcd}(72, 29)$$

$$1 = 29 - 14 \times 2$$

$$1 = 29 - (72 - 29 \times 2) \times 2$$

$$1 = 29 \times 5 + 72 \times (-2)$$



## Principe de la cryptographie asymétrique

### RSA : Rivest, Shamir, Adelman

Généralités et rappels

Chiffre RSA en 4 étapes

Analyse des points clefs du chiffre

Mise en pratique de RSA



# Les 4 étapes du chiffre RSA



1. Alice, destinataire génère de 2 grands nombres premiers
2. Alice choisit sa clef publique  $K_A$ , la partage et construit sa clef privée associée  $K_A^{-1}$
3. Bob chiffre  $M$  selon  $C = E(M, K_A)$  et envoi  $C$  à Alice
4. Alice déchiffre  $C$  selon  $D(C, K_A^{-1})$ , c'est  $M$



# Alice génère 2 grands nombres premiers $p$ et $q$

## Taille de $p$ et $q$ ?

- ▶ Ordre de grandeur de  $p$  et  $q$  : 1024 bits ( $\approx$  309 chiffres, 64 hex)
- ▶ Ordre de grandeur de  $n = p \times q$  : 2048 bits ( $\approx$  617 chiffres, 128 hex)

## Obtenir un grand nombre premier : par générer tester

- ▶ En utilisant un PRNG cryptographiquement sûr
- ▶ En testant la primalité du nombre engendré (par Miller-Rabin, vu à la fin)

## Calcul de la valeur de l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$

- ▶ Par définition :  $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$
- ▶ Si l'adversaire connaît  $n$ , mais ni  $p$ , ni  $q$ 
  - ▶ Peut essayer de factoriser  $n$ , mais problème très difficile
  - ▶ Ne peut donc pas calculer  $\varphi(n)$

## Exemple jouet

- ▶  $p = 7$ ,  $q = 13$ ,  $n = 91$ ,  $\varphi(91) = 72$



# Alice construit ses clefs $K_A$ et $K_A^{-1}$

La clef publique  $K_A = (e, n)$  à diffuser

- ▶ Avec  $e$ ,  $1 \leq e < \varphi(n)$ ,  $e$  premier avec  $\varphi(n)$
- ▶  $K_A = (e, n)$  peut être partagée pour chiffrer des messages

La clef privée  $K_A^{-1} = (d, n)$  à conserver

- ▶  $e$  et  $\varphi(n)$  premiers entre eux :
  - ▶ Bézout :  $\exists d$  et  $y$  tq.  $e.d + \varphi(n).y = 1$  ( $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ )
- ▶  $K_A^{-1} = (d, n)$  doit être conservée par Alice pour déchiffrer

Poursuite de l'exemple

- ▶ 29 et 72 premiers entre-eux :  $K_A = (29, 91)$  est une clef publique
- ▶  $1 = 29 \times 5 + 72 \times (-2)$  (T13) : la clef privée associée est  $K_A^{-1} = (5, 91)$

# Bob chiffre $M$ selon $C = E(M, K_A)$

## Découpage en bloc de $k$ bits

- ▶  $k$  : plus grand entier tel que  $2^k < n$  ( $n$  est connu)
- ▶ chaque bloc de  $M$  : vu comme un entier  $m$  ( $m \leq 2^k - 1 < n$ )

## Chiffrement de $m$ avec $K_A = (e, n)$

- ▶  $c \equiv m^e \pmod{n}$

## Poursuite de l'exemple : chiffrement de $M = 59$ avec $K_A = (29, 91)$

- ▶  $k = 6$  ( $2^6 = 64 < 91 \leq 2^7 = 128$ )  $\leadsto$  chiffrement de  $M = m = 59$  possible
- ▶  $59^{29} \pmod{91}$  : ne pas évaluer d'abord  $59^{29}$  puis la division par 91 ensuite
- ▶ Exponentiation rapide : décomposition
  - ▶  $59^{29} \pmod{91} = 59^1 \cdot 59^4 \cdot 59^8 \cdot 59^{16} \pmod{91} = 59 \cdot 74 \cdot 16 \cdot 74 \pmod{91} = 89 \pmod{91}$

# Alice déchiffre $C$ selon $M = D(C, K_A^{-1})$



Déchiffrement de  $c$  avec  $K_A^{-1} = (d, n)$

- ▶ Chaque mot  $c$  : décodé en un mot  $m'$  sur  $k$  bits par
  - ▶  $m' \equiv c^d \pmod n$ , par exponentiation rapide aussi
- ▶ Concaténation des mots  $m'$  sur  $k$  bits pour obtenir  $M'$  ( $=M$ ?)

Poursuite de l'exemple : déchiffrement de  $c = 89$  avec  $K_A^{-1} = (5, 91)$

- ▶  $89^5 \pmod{91} = 89^1 \cdot 89^4 \pmod{91} = 89 \cdot 16 \pmod{91} = 59 \pmod{91}$
- ▶  $m' = 59 = M' = M$





## Principe de la cryptographie asymétrique

### RSA : Rivest, Shamir, Adelman

Généralités et rappels

Chiffre RSA en 4 étapes

Analyse des points clefs du chiffre

Mise en pratique de RSA



# Correction de l'algorithme

## Théorème (Petit théorème de Fermat)

Si  $p$  est un nombre premier et  $m$  est un entier non multiple de  $p$ , alors :

$$m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

## Déchiffrement $M = D(E(M, K_A), K_A^{-1})$

- ▶  $c^d = m^{ed} = m^{1-y \times \varphi(n)} \equiv m \times (m^{\varphi(n)})^{-y}$
- ▶ Si  $m$  n'est pas multiple de  $p$ , alors  $m^{ed} = m \times (m^{p-1})^{-y \cdot (q-1)}$   
 $\equiv m \times (1)^{-y \cdot (q-1)} \pmod{p} \rightsquigarrow m^{ed} - m$  est multiple de  $p$
- ▶ Sinon ( $m$  est multiple de  $p$ ), alors  $m^{ed} - m$  est multiple de  $p$
- ▶ Similairement  $m^{ed} - m$  est multiple de  $q$
- ▶  $p$  et  $q$  premiers  $\rightsquigarrow m^{ed} - m$  multiple de  $pq$ , c.-à-d. de  $n$
- ▶  $m^{ed} \equiv m \pmod{n}$

# Trouver des grands nombres premiers $p$ et $q$

## Principes

- ▶ A disposition : test de primalité (éventuellement probabiliste) d'un nombre
- ▶ On tire un nombre  $n$  impair (et non divisible par 5) au hasard.
- ▶ Il y a en moyenne  $\frac{n}{\log n}$  premiers inférieurs à  $n$  : en moyenne  $O(\log n)$  tentatives avant de trouver un premier

Nombre de chiffres	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
Dernier chiffre qcque	172	230	287	345	402	460	518	575	633	690
Dernier chiffre impair	86	115	143	172	201	230	259	287	316	345
Dernier chiffre {1, 3, 7, 9}	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276

Probabilités inverse d'obtenir un nombre premier

# Trouver des grands nombres premiers $p$ et $q$

## Principes

- ▶ A disposition : test de primalité (éventuellement probabiliste) d'un nombre
- ▶ On tire un nombre  $n$  impair (et non divisible par 5) au hasard.
- ▶ Il y a en moyenne  $\frac{n}{\log n}$  premiers inférieurs à  $n$  : en moyenne  $O(\log n)$  tentatives avant de trouver un premier

Nombre de chiffres	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
Dernier chiffre qcque	172	230	287	345	402	460	518	575	633	690
Dernier chiffre impair	86	115	143	172	201	230	259	287	316	345
Dernier chiffre $\{1, 3, 7, 9\}$	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276

Probabilités inverse d'obtenir un nombre premier

Il reste à savoir décider si un nombre donné est premier ou pas

# Test de primalité de Miller-Rabin

## Tester la primalité d'un entier impair $n$

- ▶ écrire  $n - 1 = t2^s$ , avec  $s$  et  $t$  dans  $\mathbb{N}$
- ▶ admis :  $a^{n-1} - 1 = a^{t2^s} - 1 = (a^t - 1)(a^t + 1)(a^{2t} + 1) \dots (a^{(2^{s-1})t} + 1)$
- ▶ petit théorème de Fermat si  $n$  est premier :  $a^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod n$ , c.-à-d.  
 $a^t - 1 \equiv 0 \pmod n$  ou  $\exists i, 0 \leq i < s, a^{2^i} + 1 \equiv 0 \pmod n$  (2)

## Test de Miller-Rabin pour $n$

testMillerRabin( $n, h$ )

Calculer  $s$  et  $t$  tels que  $n - 1 = t \times 2^s$

for  $i$  from 1 to  $h$  do

    if temoinMiller( $s, t, n, a$ ) then

        return "Pas premier"

    end if

end for

return "Probablement premier"

temoinMiller( $s, t, n, a$ )

$q \leftarrow a^t \pmod n$

if  $q = 1$  then

    return "Faux"

end if

for  $i$  from 1 to  $s$  do

    if  $q = n - 1$  then

        return "Faux"

    end if

$q \leftarrow q \times q \pmod n$

end for

return "Vrai"



# Exponentiation : rapide !

Remarques pour  $a, b$  entiers naturels

$$a^b = \begin{cases} (a^2)^{\frac{b}{2}} & \text{si } b \text{ pair} \\ a \cdot (a^2)^{\frac{b-1}{2}} & \text{si } b \text{ impair} \end{cases}$$

Algorithme rapide

Exp( $a, b$ )

if  $b = 1$  then

return  $a$

end if

if  $b$  pair then

return  $\text{Exp}(a^2 \bmod n, b/2) \bmod n$

else

return  $a \times \text{Exp}(a^2 \bmod n, (b-1)/2) \bmod n$

end if

Coût

$$C(b) = C(b/2) + O(1) = O(\log_2 b)$$



## Principe de la cryptographie asymétrique

### RSA : Rivest, Shamir, Adelman

Généralités et rappels

Chiffre RSA en 4 étapes

Analyse des points clefs du chiffre

Mise en pratique de RSA



# Clés : génération et sauvegarde



```
from Crypto.PublicKey import RSA
from Crypto.Cipher import PKCS1_OAEP

rsa_obj = RSA.generate(2048)
rsa_pub = rsa_obj.publickey()

with open('mPubKey.pem', 'wb') as f:
    f.write(rsa_pub.exportKey('PEM'))

with open('mPrivKey.pem', 'wb') as fp:
    fp.write(rsa_obj.exportKey('PEM'))
```



# Chiffé à p. de la clé publique



```
from Crypto.PublicKey import RSA
from Crypto.Cipher import PKCS1_OAEP

with open('mPubKey.pem', 'rb') as f:
    pubKey = RSA.importKey(f.read())
    encryptor = PKCS1_OAEP.new(pubKey)
    message_to_encrypt = 'Sécurité L3!'
    ciphertext = encryptor.encrypt(message_to_encrypt.encode('utf-8'))

with open("cipher.txt", "wb") as fc :
    fc.write(ciphertext)
```



# Déchiffé à p. de la clé privée

```
from Crypto.PublicKey import RSA
from Crypto.Cipher import PKCS1_OAEP

with open("cipher.txt","rb") as fd :
    ciphertext = fd.read()

with open('mPrivKey.pem','rb') as fe:
    privKey = RSA.importKey(fe.read())
    decryptor = PKCS1_OAEP.new(privKey)
    decrypted_message = decryptor.decrypt(ciphertext)
    print(decrypted_message.decode('utf-8'))
```

