

Optique quantique Cours d'Eric Lantz

Introduction

La lumière est composée de photons \leftrightarrow dualité onde-corpuscule

Vous en avez entendu parler : Einstein propose d'expliquer l'effet photoélectrique en introduisant des quanta de lumière, les photons d'énergie $h\nu$.

Forme la plus simple de la dualité : Probabilité (détecter un photon) \propto Intensité du faisceau.

Plus précisément, pour une lumière monochromatique de fréquence ν :

$$P_{\text{det}} = \frac{\eta}{h\nu} \int_0^{t_1} dt \int_S I(t) ds \quad (1)$$

η : rendement quantique, soit la probabilité de générer un photoélectron, sachant qu'un photon touche le capteur. S: surface du détecteur, mis sous tension à $t=0$ et hors tension à $t=t_1$. Unités : I en W/m^2 et $h\nu$ en Joules

Points non traités dans ce cours : le mécanisme précis de l'interaction matière-rayonnement. On se bornera à rappeler que l'énergie du photon doit être suffisante pour exciter un atome et faire "sauter" un électron dans la bande de conduction. par exemple, pour une caméra C.C.D. en silicium, η passe de 95% pour une longueur d'onde de $0.8 \mu m$ à 5% vers $1 \mu m$ et bien moins au-delà (la transition vers les rendements quantiques nuls n'est pas brutale aux températures non nulles, car l'agitation thermique peut aider un électron à franchir le gap.

Points traités:

- à une intensité constante, correspond une probabilité de présence constante d'arrivée des photons \rightarrow à l'absence de fluctuations classiques correspond un temps d'arrivée aléatoire des photons, donc des fluctuations quantiques \rightarrow définition des états cohérents par la statistique des photons.

- Est-il possible de supprimer ces fluctuations quantiques ? la réponse peut être oui si on tient compte des **probabilités conditionnelles** : Proba (détecter un photon | la détection d'un autre photon) . | signifie "sachant". Ces probabilités conditionnelles ne sont pas décrites par l'Eq. (1) et permettent d'espérer une lumière moins fluctuante que d'intensité constante, donc spécifiquement quantique, où le fait de détecter un photon entraîne une probabilité plus faible d'en détecter un autre; on parlera de lumière comprimée¹. Dans ces états, le champ électrique classique ne donne pas toute l'information statistique sur les photons.

- Les photons existent-ils en dehors de la détection (caractère quantifié de l'interaction matière rayonnement)? Nous verrons que ces probabilités conditionnelles peuvent intervenir avant la détection, notamment au niveau d'une lame semi-transparente.

Exemples :

- interférences à un photon
- photons jumeaux (si détection de l'un, l'autre est toujours présent) et intrication : les deux photons se comportent de la même manière, y compris à distance
- la lame semi-transparente : comportement classique et comportement en présence de photons jumeaux.
- téléportation d'un état quantique
- cryptographie quantique.

Connaissances supposées acquises

- l'oscillateur harmonique, opérateurs création et annihilation
- le point de vue de Heisenberg (les opérateurs se propagent et sont appliqués aux fonctions d'onde d'entrée).

Table des matières

Chapitre 1: La lame semi-transparente : approche semi-intuitive

Chapitre 2 : Quantification du champ électromagnétique : photons

Chapitre 3 : Etats cohérents. La lame semi-transparente : approche quantique.

Chapitre 4 : Compression du bruit (squeezing).

Chapitre 5 : Cryptographie quantique et téléportation

Chapitre 6: (A partir de son cours²) Voir les photons sans les détruire : les expériences d'Haroche

Ce polycopié ne porte que sur les quatre premiers chapitres. La référence 4 est une bonne introduction à la cryptographie quantique. Pour la téléportation, on pourra se reporter à **BR** p. 387-397

Bibliographie :

- 1) La Recherche 218 Février 1990, p. 170-179 : la lumière comprimée
- 2) Cours de Serge Haroche au collège de France :
<http://www.cqed.org/college/collegeparis.html> Année 2007-2008
- 3) L. Mandel and E. Wolf, "Optical coherence and quantum Optics", Cambridge University Press : **MW**
- 4) La Recherche 233, Juin 1991 , p. 790-791 : La mécanique quantique au secours des agents secrets.
- 5) Hans-Albert Bachor, Timothy C. Ralph, "A guide to experiments in quantum optics", 2nd edition, Wiley-Ch 2004 : **BR**
- 6) Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc, Gilbert Grynberg, "Photons et atomes," , CNRS Editions, EDP Science : **CC**
- 7) Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, "Mécanique quantique", Hermann : **MQ**
- 8) D.F. Walls, G. J. Milburn, "Quantum Optics", Springer, 2nd edition, (2008)

Chapitre 1: La lame semi-transparente : approche semi-intuitive

I) Approche classique des états cohérents

I.1) Introduction et définition classique

Etat cohérent $\hat{=}$ onde plane monomode : $A(t) = C \text{ste}$

En pratique, la meilleure approximation est un faisceau laser très monochromatique, à la répartition transverse gaussienne. La largeur fréquentielle théorique d'un laser peut être aussi petite que le Hz/10, plutôt 1kHz en pratique.

I.2) Statistique suivie par les photons

$P(1 \text{ photon(déecté) entre } t \text{ et } t+dt) \propto |A|^2 dt$

$|A|^2 dt \ll 1$ et événements indépendants $\Rightarrow P(2 \text{ photons déectés entre } t \text{ et } t+dt) \approx 0$

C'est la définition d'une loi de Poisson. Soit $\langle N \rangle$ le nombre moyen de photons

déectés pendant Δt (non infinitésimal) : $\langle N \rangle = E(N) = \sum_{N=0}^{\infty} N P(N)$

$$P(N \text{ sur } \Delta t) = \frac{e^{-\langle N \rangle} \langle N \rangle^N}{N!} \quad (2)$$

Démonstration : voir chapitre 3

Variance : $\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$. Or, sur dt infiniment petit, N vaut 0 ou 1 et est donc égal à N^2 . De plus $(\langle N^2 \rangle \approx \langle N \rangle) \gg \langle N \rangle^2$. Soit $\langle \Delta N^2 \rangle \approx \langle N \rangle$. Cette propriété, démontrée sur l'infinitésimal dt , reste valable sur un intervalle Δt quelconque : les événements sont indépendants, donc les variances s'ajoutent, comme les moyennes.

Etat cohérent \Rightarrow Statistique poissonnienne des photons \Rightarrow Variance=moyenne.

Bien entendu, variance=moyenne n'est possible que pour un nombre d'événements discrets et n'a aucun sens pour une grandeur continue.

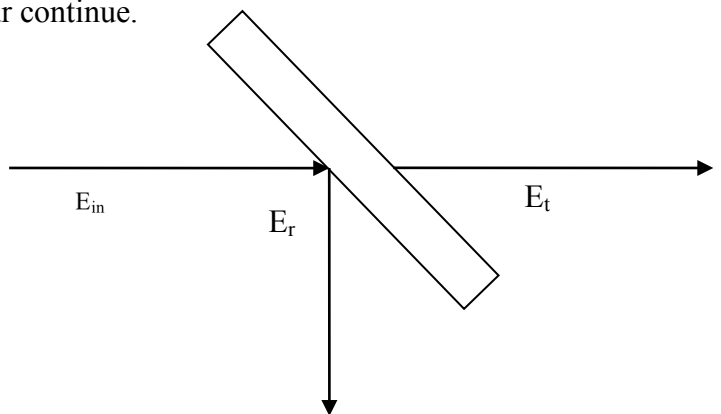
II Lame semi-transparente et photons

II.1) Un faisceau cohérent incident

Coefficient de transmission : $T = |t|^2 = 0.5$

Coefficient de réflexion : $R = |r|^2 = 0.5$

$I_{in} = C \text{ste}(t) \Rightarrow I_r = I_t = 0.5 I_{in} = C \text{ste}(t)$



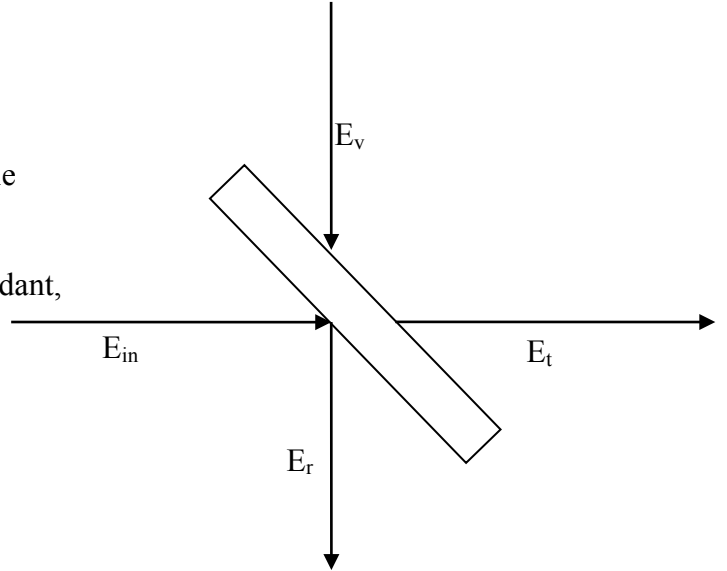
Intensités en sortie constantes \Rightarrow Statistiques des photons Poissonniennes.

Soit, par exemple sur le faisceau transmis : $I_t = 0.5 I_{in}$.

Pour chaque photon incident, la lame semi-transparente tire à pile ou face si ce photon est transmis ou réfléchi. Ce comportement aléatoire de la lame entraîne une division par $\sqrt{2}$ du rapport signal sur bruit $\frac{\langle N \rangle}{\sqrt{\langle \Delta N^2 \rangle}}$.

II.2) Deux faisceaux cohérents incidents

E_v et E_{in} sont cohérents entre eux (par exemple issus du même laser) et vont interférer constructivement ou destructivement sur les sorties en fonction de leurs phases. Cependant, la conservation de l'énergie impose qu'une frange brillante sur t soit toujours associée à une frange sombre sur r, ce qui impose une relation de phase entre les coefficients de transmission et de réflexion en amplitude t_{in}, t_v, r_{in}, r_v , soit :



$$\begin{aligned}
 |E_{in}|^2 + |E_v|^2 &= |E_t|^2 + |E_r|^2 = |t_{in}E_{in} + r_vE_v|^2 + |t_vE_v + r_{in}E_{in}|^2 \\
 &= T|E_{in}|^2 + R|E_v|^2 + [t_{in}r_v^*E_{in}E_v^* + c.c.] \\
 &\quad + T|E_v|^2 + R|E_{in}|^2 + [r_{in}t_v^*E_{in}E_v^* + c.c.]
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

...ce qui impose que la somme des termes entre crochets doit être nulle, soit :

$$t_{in}r_v^* + r_{in}t_v^* = 0 \Rightarrow \varphi_{in} - \varphi_{rv} = \pi + \varphi_{rin} - \varphi_{tv} \tag{4}$$

où φ désigne les phases des coefficients. Une solution est : $t_{in}=t_v=r_v=\sqrt{2}/2$,
 $r_{in}=-\sqrt{2}/2$,
 soit, après la lame :

$$\begin{aligned}
 |E_t|^2 &= T|E_{in} + E_v|^2 \\
 |E_r|^2 &= R|E_{in} - E_v|^2
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

E_{in} et E_v en phase, interférences constructives sur T, destructives sur R
 E_{in} et E_v déphasés de π , interférences constructives sur R, destructives sur T

II.2) Deux photons intriqués incidents (MW p.646, BR p.105)

L'état incident est une paire de photons intriqués, représentés par la fonction d'onde :

$\psi = |1_{in}, 1_v\rangle$, soit un photon présent en v **si et seulement si** un photon présent en in.

En d'autres termes, les photons peuvent être (sont en général) produits de façon aléatoire, mais toujours par paires in,v. Parmi les méthodes possibles, dont certaines font appel à des cascades radiatives d'un atome excité, prenons pour exemple la conversion basse spontanée (Spontaneous down conversion, SPDC) en optique non linéaire, où un photon pompe de fréquence ω_p est annihilé et donne naissance à deux photons signal et idler, de fréquence ω_s et ω_i , $\omega_s + \omega_i = \omega_p$. La conversion est aléatoire, mais la conservation de l'énergie impose l'émission de paires de photons:

$$P(1 \text{ photon signal} \mid 1 \text{ photon idler}) = 1. \quad (6)$$

Bien entendu, cet état est purement quantique, puisqu'un champ classique ne peut pas décrire des probabilités conditionnelles.

On montre (voir chapitre 3) que l'**amplitude** de probabilité liée à une possibilité en sortie est le produit des amplitudes de probabilité pour chaque processus. Il y a 4 possibilités :

- 2 photons réfléchis :	amplitude $r_{in} r_v = -1/2 \rightarrow 1_t, 1_r\rangle$
- 2 photons transmis :	amplitude $t_{in} t_v = 1/2 \rightarrow 1_t, 1_r\rangle$
photon v transmis, photon in réfléchi,	amplitude $r_{in} t_v = -1/2 \rightarrow 0_t, 2_r\rangle$
photon in transmis, photon v réfléchi,	amplitude $r_v t_{in} = 1/2 \rightarrow 2_t, 0_r\rangle$

$$\text{soit : } |\psi_{out}\rangle \propto (1/2 - 1/2)|1_t, 1_r\rangle + 1/2[|2_t, 0_r\rangle - |0_t, 2_r\rangle] \quad (7)$$

Le premier terme étant nul, on en conclut que les photons sortent tous deux sur la même voie, avec une probabilité 1/2 pour chacune des voies (N.B. : ce calcul "intuitif" aboutit à une fonction d'onde non normalisée, contrairement au chapitre 3).

Dans l'expérience de Hong-Ou-Mandel de 1987, on détecte les coïncidences avec une résolution temporelle de l'ordre de la centaine de nanosecondes : si les deux photons d'une paire arrivent avec un léger décalage, bien inférieur à cette résolution, sur la lame semi transparente, ils n'interfèrent pas et ressortent aléatoirement sur l'une ou l'autre des voies, donnant lieu à coïncidence si ils sortent sur des voies différentes, ce qui se produit avec une chance sur deux. En revanche, si les deux photons arrivent ensemble, ils sortent sur la même voie, ce qui se traduit expérimentalement par une chute des coïncidences, jusqu'à 0 en l'absence de coïncidences parasites dues soit à l'électronique, soit à l'arrivée de deux paires dans la fenêtre de résolution du détecteur. La largeur de ce "creux de coïncidences", de l'ordre de la centaine de fs, donne accès à la largeur de la fonction d'onde du photon, proportionnelle en SPDC à l'inverse de la largeur fréquentielle de l'émission des paires, elle même liée aux conditions d'accord de phase (voir le cours d'optique non linéaire). Dans cette expérience originelle, le décalage des arrivées est obtenu en modifiant les chemins optiques. Dans des versions plus récentes de l'expérience (voir par exemple J. Beugnon et al, Nature 4628, Avril 2006, p.779), la largeur de la fonction d'onde due à une transition atomique est de l'ordre de la dizaine de nanosecondes, soit cette fois bien supérieure à la résolution du détecteur, à l'électronique de 20 ans plus récente. On peut alors enregistrer directement dans le temps l'interférence des fonctions d'onde des deux photons, produits ici par deux atomes distincts, piégés par laser et excités simultanément.

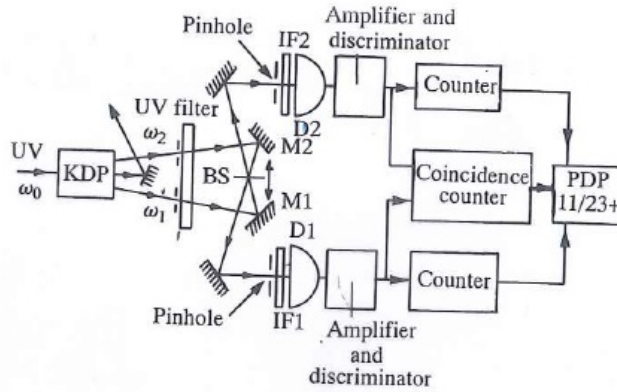


Fig. 22.5 Outline of an experiment to measure the time separation between two photons by interference at a beam splitter BS. KDP is a nonlinear crystal of potassium dihydrogen phosphate functioning as down-converter and PDP 11/23 is a computer. (Reproduced from Hong, Ou and Mandel, 1987.)

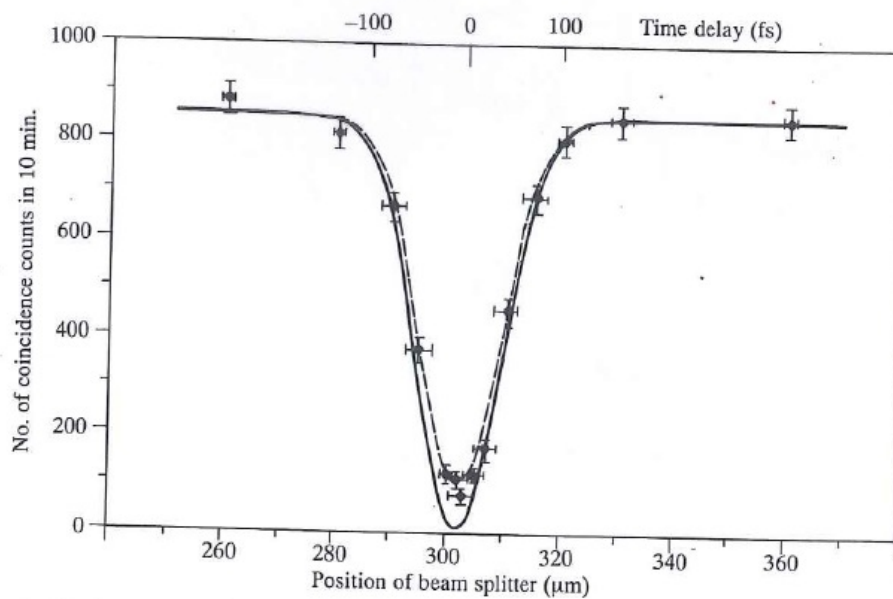


Fig. 22.6 Results of two-photon coincidence measurements as a function of differential time delay between the two photons superimposed on the theoretical (full) curve. (Reproduced from Hong, Ou and Mandel, 1987.)

Chapitre 2 : Quantification du champ électromagnétique : photons
(inspiré de "Photons et atomes", p.9 à 37 : CC)

I) Position du problème

Les équations de Maxwell sont à dérivées partielles : tous les points de l'espace sont connectés. En revanche, dans le domaine des fréquences spatiales, le champ peut être exprimé sous forme d'une superposition d'ondes planes indépendantes. Or, une onde plane monochromatique est l'équivalent d'un oscillateur harmonique :

Si on montre qu'une onde plane obéit aux mêmes équations classiques qu'un oscillateur harmonique, on pourra la quantifier de façon totalement similaire et les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique, séparés de $h\nu$, correspondront à un nombre de photons.

II) Décomposition modale du champ électromagnétique, équations du mouvement

II.1) Equations du mouvement

Dans un milieu isotrope sans charge et sans courants, le champ électromagnétique est transverse et il reste deux équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \\ \nabla \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (8)$$

Ces équations non locales (du fait de l'opérateur gradient) deviennent locales après une transformée de Fourier sur les variables d'espace $\vec{r} : \nabla \rightarrow T.F \rightarrow .j\vec{k}$:

$$j\vec{k} \wedge \vec{E}(\vec{k}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{k}, t) \quad (9)$$

$$jc^2 \vec{k} \wedge \vec{B}(\vec{k}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{k}, t) \quad (10)$$

soit $\vec{k} \triangleq \vec{k} / \|\vec{k}\|$. Alors (10) $\pm c\vec{k} \wedge$ (9) s'écrit, en utilisant $\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = -\|\vec{k}\|^2 \vec{E}$ (car $\vec{k} \perp \vec{E}$) et $\omega = kc$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E}(\vec{k}, t) \pm c\vec{k} \wedge \vec{B}(\vec{k}, t) \right) = \pm j\omega \left(\vec{E}(\vec{k}, t) \pm c\vec{k} \wedge \vec{B}(\vec{k}, t) \right) \quad (11)$$

(11) est un système de deux équations non couplées, contrairement à (9) et (10). Pour chaque \vec{k} , on peut définir deux directions de polarisation \vec{x} et \vec{y} dans le plan orthogonal à \vec{k} . Sans perte de généralité, on supposera $\vec{E}(\vec{k}, t)$ polarisé suivant \vec{y}

(on verra plus tard que les deux directions de polarisation correspondent à deux modes distincts), et on définit les variables normales :

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{k}, t)\vec{y} &= -\frac{j}{2\mathbb{N}(k)}\left(\vec{E}(\vec{k}, t) - c\vec{k} \wedge \vec{B}(\vec{k}, t)\right) \\ \beta(\vec{k}, t)\vec{y} &= -\frac{j}{2\mathbb{N}(k)}\left(\vec{E}(\vec{k}, t) + c\vec{k} \wedge \vec{B}(\vec{k}, t)\right)\end{aligned}\quad (12)$$

où $\mathbb{N}(k)$ est un facteur de normalisation qui sera défini plus tard. $\alpha(\vec{k}, t)$ obéit à l'équation d'un oscillateur harmonique avec, dans le cas de ce dernier, $\alpha = x + j(p/m\omega)$ soit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(\vec{k}, t)\right) + j\omega\left(\alpha(\vec{k}, t)\right) = 0 \quad (13)$$

Les variables α et β des équations (12) ne sont pas indépendantes. En effet :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \text{ et } \vec{B}(\vec{r}, t) \text{ réels} \Rightarrow \vec{E}(\vec{k}, t) = \vec{E}^*(-\vec{k}, t) \Rightarrow \beta(\vec{k}, t) = -\alpha^*(-\vec{k}, t) \quad (14).$$

Il est donc possible de reconstituer les champs à partir d'une seule de ces variables. Par exemple, pour \vec{E} : $\vec{E}(\vec{k}, t) = j\mathbb{N}(k)\left(\alpha(\vec{k}, t) - \alpha^*(-\vec{k}, t)\right)\vec{y}$.

De façon à exprimer l'énergie en nombre de photons on pose : $\mathbb{N}(k) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}$, ce qui

permet d'écrire l'énergie du champ transverse H sous la forme:

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3k \left[\|\vec{E}(\vec{k}, t)\|^2 + c^2 \|\vec{B}(\vec{k}, t)\|^2 \right] = \int d^3k \frac{\hbar\omega}{2} \left[\alpha^*(\vec{k}, t)\alpha(\vec{k}, t) + \alpha(\vec{k}, t)\alpha^*(\vec{k}, t) \right] \quad (15)$$

N.B 1) : pour que l'intégrale prenne en compte tous les modes possibles, il faudrait considérer pour chaque \vec{k} les deux polarisations possibles.

N.B 2) L'ordre de α et α^* n'a, bien sûr, aucune importance dans cette expression classique. On a écrit (15) sous une forme symétrique afin de préparer la quantification.

II.2) Décomposition modale

On peut quantifier directement les intégrales continues (15), en utilisant des commutateurs faisant intervenir des impulsions de Dirac. On utilisera ici la solution plus simple de décomposition en modes discrets. On plonge le champ dans un cube de côté L.

Les conditions aux limites imposent $L = n_{x,y,z} \lambda$, n entier, soit $k_{x,y,z} = \frac{2\pi}{L} n_{x,y,z}$. La

variable normale devient : $\alpha(\vec{k}, t) \rightarrow \alpha_i(t)$, $i = f(n_x, n_y, n_z)$ entier numéro du mode.

III) Quantification

On vient de décomposer le champ électrique en une somme d'oscillateurs harmoniques. Il se quantifie de la même manière :

$$\alpha_i \rightarrow \text{opérateur } a_i \\ \alpha_i^* \rightarrow \text{opérateur } a_i^\dagger \text{ et } [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

où $[\]$ désigne le commutateur.

Le champ devient un opérateur, qui peut donc s'exprimer sous la forme :

$$E(r, t) = E^+(r, t) + E^-(r, t) = \sum_i c_i \left[a_i e^{j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} e^{-j\omega t} - a_i^\dagger e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} e^{j\omega t} \right] \quad (16)$$

Les termes de fréquence positive, en $e^{-j\omega t}$ avec des opérateurs a_i , sont regroupés dans E^+ , ceux de fréquence négative avec des opérateurs a_i^\dagger dans E^- .

$$\text{L'Hamiltonien s'écrit : } H = \frac{1}{2} \sum_i \hbar \omega_i (a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger) = \sum_i \hbar \omega_i \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) \quad (17)$$

IV) Etats propres de l'énergie, photons

On définit comme pour l'oscillateur harmonique l'état nombre n_i , appelé ici état de Fock à n photons, vecteur propre de $a_i^\dagger a_i$: $a_i^\dagger a_i |n_i\rangle = n_i |n_i\rangle$, n_i entier positif ou nul, et :

$$a_i^\dagger |n_i\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_i + 1\rangle, \quad a_i |n_i\rangle = \sqrt{n_i} |n_i - 1\rangle, \quad a_i |0\rangle = 0 \quad (18)$$

On peut ainsi "remplir de photons" les différents modes par applications répétées de l'opérateur création à partir du vide :

$$|n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \dots \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle \quad (19)$$

on est conduit ainsi à la définition du photon :

photon $\hat{=}$ excitation élémentaire d'un mode du champ électromagnétique quantifié

Tout comme pour l'oscillateur harmonique, l'hamiltonien appliqué sur un mode vide donne une énergie $\frac{1}{2} \hbar \omega_i$. Si ce point a des conséquences, il n'est cependant pas question de détecter directement l'énergie du vide (en contradiction évidente avec la conservation de l'énergie). On peut noter à ce propos qu'une quantité mesurable telle que le nombre de photons correspond à ce qu'on appellera l'ordre normal : les opérateurs a_i^\dagger à gauche des opérateurs a_i .

Chapitre 3: Etats cohérents et traitement quantique de la lame semi-transparente

I) Définition d'un état cohérent (MQ complément G_V)

On veut trouver l'état quantique $|\alpha_i\rangle$ qui reproduit au mieux les propriétés de l'onde plane d'amplitude α_i dans le mode i . Il faut que la moyenne de l'opérateur champ appliqué à ce mode donne l'amplitude classique, et que la moyenne du nombre de photons corresponde à l'intensité classique (exprimée en nombre de photons par mode spatio-temporel). On cherche donc $|\alpha_i\rangle$ tel que :

$$\begin{aligned} \langle \alpha_i | a_i | \alpha_i \rangle &= \alpha_i \\ \langle \alpha_i | a_i^\dagger a_i | \alpha_i \rangle &= \alpha_i^* \alpha_i = \langle N \rangle \end{aligned} \quad \text{où } \langle N \rangle \text{ est le nombre moyen de photons dans le mode.} \quad (20)$$

Le vecteur propre de a_i avec la valeur propre α_i est solution, soit l'état vérifiant $a_i |\alpha_i\rangle = \alpha_i |\alpha_i\rangle$. Ce sera la définition de l'état cohérent dans le mode i .

II) Propriétés

II.1) Nombre de photons

On omet dans la suite l'indice i . On tire de (20) et du conjugué hermitique de (18) :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \\ \langle n | a^\dagger = \sqrt{n} \langle n-1 | \end{array} \right\} &\Rightarrow \langle n | a^\dagger a |\alpha\rangle = n \langle n | \alpha\rangle = \sqrt{n} \alpha \langle n-1 | \alpha\rangle \\ &\Rightarrow \langle n | \alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \langle n-1 | \alpha\rangle \end{aligned} \quad (20)$$

Si on connaît l'amplitude de $|\alpha\rangle$ sur $|n-1\rangle$, on peut donc en déduire l'amplitude sur $|n\rangle$. On amorce la relation de récurrence en remarquant que l'état vide $|0\rangle$ est à la fois un état cohérent et un état de Fock. En appliquant n fois la relation (20), on trouve l'amplitude de $|\alpha\rangle$ sur $|n\rangle$, ce qui donne pour $|\alpha\rangle$ la décomposition :

$$|\alpha\rangle = K \left[|0\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{1}} |1\rangle + \dots + \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle + \dots \right] \quad (21)$$

K assure la normalisation de $|\alpha\rangle$:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1 = K^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} \right)^2 = K^2 e^{|\alpha|^2} \Rightarrow |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (22)$$

La probabilité de mesurer n photons est:

$$P(n) = |\langle \alpha | n \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} = e^{-\langle N \rangle} \frac{\langle N \rangle^n}{n!} \quad (23)$$

On retrouve bien la distribution poissonnienne attendue.

II.2) Variance

Puisque le nombre de photons est poissonnien, la variance est égale à la moyenne. On peut le vérifier directement :

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha \\ \langle \Delta N^2 \rangle &= \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle \alpha | a^\dagger a a^\dagger a | \alpha \rangle - (\alpha^* \alpha)^2 = \langle \alpha | a^\dagger a^\dagger a a | \alpha \rangle + \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle - (\alpha^* \alpha)^2 = \alpha^* \alpha = \langle N \rangle \end{aligned}$$

(24)

III) Etats transmis par une lame semi-transparente

III.1) Un faisceau cohérent incident

Peut-on écrire que l'état en sortie est simplement donné par $|\beta\rangle = t|\alpha\rangle$ (ou $r|\alpha\rangle$ en réflexion) ?

On verra que la réponse est presque correcte ici (il y a cependant un évident problème de normalisation), mais uniquement car le système est linéaire. Des raisonnements aussi simples peuvent être dangereux en optique quantique.

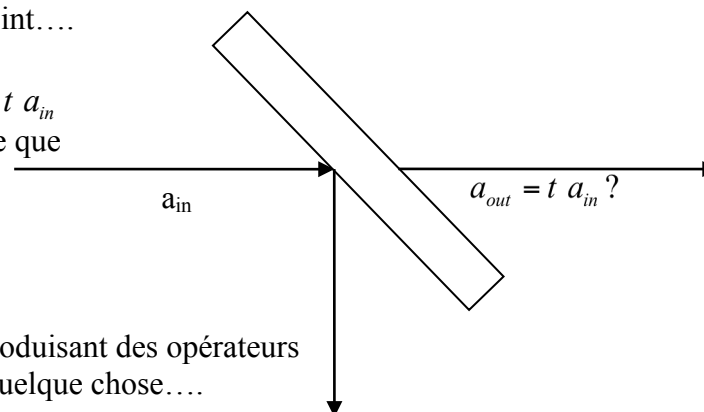
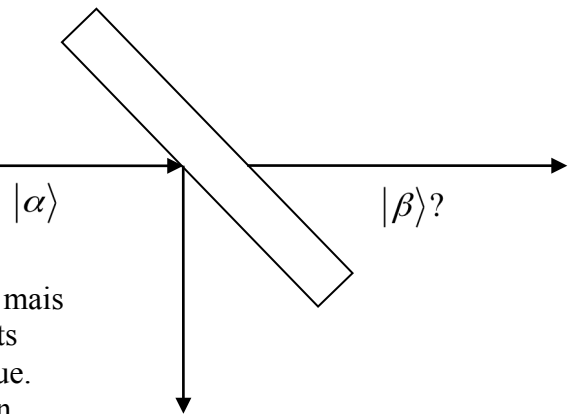
En revanche, la quantification a transformé les champs en opérateurs. Il est donc souvent plus facile et sûr de déduire des équations classiques de propagation des champs les équations équivalentes de propagation des opérateurs, donc d'adopter le point de vue de Heisenberg, en faisant agir au final les opérateurs de sortie sur les fonctions d'onde d'entrée. Les équations de propagation des opérateurs ne diffèrent des équations classiques que sur un point....

Les équations classiques conduisent ici à $a_{out} = t a_{in}$

En calculant le commutateur, on se rend compte que ce résultat n'est pas correct :

$$[a_{out} a_{out}^\dagger] = tt^* < 1$$

Or, la quantification du champ s'est faite en introduisant des opérateurs a_i sur le mode i de commutateur 1. Il manque quelque chose....

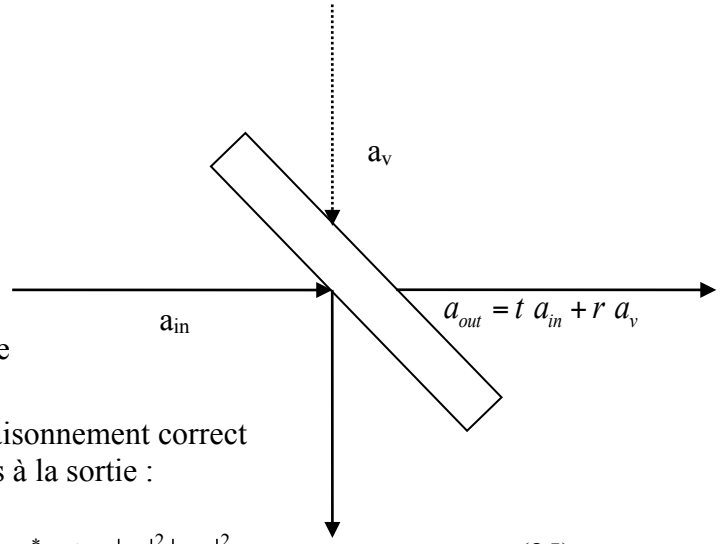


En fait, on doit écrire le champ dans le mode de sortie comme la superposition d'un champ transmis et d'un champ réfléchi, même si ce champ agit sur le vide.

On vérifie facilement que le commutateur de $a_{out} = t a_{in} + r a_v$ est bien unitaire.

Le raisonnement qui "oublie" le vide et le raisonnement correct donnent le même nombre moyen de photons à la sortie :

$$\langle N_{out} \rangle = \langle \alpha_{in} | \langle 0 | a_{out}^\dagger a_{out} | 0 \rangle | \alpha_{in} \rangle = t_{in}^* t_{in} \alpha_{in}^* \alpha_{in} + r_v^* r_v \cdot 0 = |t_{in}|^2 |\alpha_{in}|^2 \quad (25)$$



En revanche, un calcul analogue à (24) montre qu'on n'obtient $\langle \Delta N_{out}^2 \rangle = \langle N_{out} \rangle$ que en utilisant la forme correcte de a_{out} . Ce calcul peut se faire très rapidement en utilisant le fait que le commutateur de a_{out} est unitaire, ou plus laborieusement en partant de $a_{out} = t a_{in} + r a_v$. Cette deuxième manière (faites le !) a cependant l'avantage de mettre en évidence les termes de variance qui viennent des fluctuations du vide. Pour poursuivre les représentations intuitives du chapitre 1, on peut dire que c'est le vide qui assure le tirage au sort des photons au niveau de la lame !

III.2) Un état intriqué incident

A) Correspondance point de vue de Schrödinger point de vue de Heisenberg (BR p.80)

Si l'optique classique permet de déterminer comment se propagent les opérateurs, il n'en est pas de même pour les fonctions d'onde. Très souvent, déterminer $|\psi_{out}\rangle$ est difficile, en particulier si le nombre de photons varie (amplificateurs). En d'autres termes on trouve facilement les valeurs moyennes $\langle \psi_{out} | A_{in} | \psi_{out} \rangle = \langle \psi_{in} | A_{out} | \psi_{in} \rangle$ car A_{out} se calcule facilement par correspondance avec les équations classiques, mais $|\psi_{out}\rangle$ peut être d'une complexité effrayante. Prenons le cas d'une matrice de 8x8 photodétecteurs, sur lesquels peuvent arriver de 0 à 5 photons. $|\psi_{out}\rangle$ est la superposition des amplitudes de probabilité pour chacune des 6^{64} possibilités.

Il existe cependant une exception, quand le système ne comprend que des éléments linéaires, qui ne créent pas de photons (une absorption est modélisée par une lame semi-transparente). En effet :

$$a_{out} = U^\dagger a_{in} U, \text{ où } U \text{ est l'opérateur d'évolution : } U |\psi_{in}\rangle = |\psi_{out}\rangle \quad (26)$$

Ecrivons la fonction d'onde en entrée sur la base des états de Fock:

$$|\psi_{in}\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle + \dots + c_n |n\rangle + \dots = \left[c_0 + c_1 a^\dagger + \dots + c_n \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \right] |0\rangle \quad (27)$$

alors la fonction d'onde en sortie s'écrit:

$$|\psi_{out}\rangle = U|\psi_{in}\rangle = U \left[c_0 + c_1 a^\dagger + \dots + c_n \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \right] U^\dagger U |0\rangle = \left[c_0 + c_1 a'^{\dagger} + \dots + c_n \frac{(a'^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}} \right] |0\rangle \quad (28)$$

avec $a' = UaU^\dagger$, relation inverse de celle reliant a_{out} à a_{in} : $a'_{out} = a_{in} = Ua_{out}U^\dagger$. Pour obtenir (28), on a utilisé le fait que le système ne crée pas de photons, $U|0\rangle = |0\rangle$ et ajouté autant d'opérateurs identité $U^\dagger U$ que nécessaire. Pour obtenir $|\psi_{out}\rangle$ il faut donc appliquer aux modes de sortie les opérateurs d'entrée utilisés dans $|\psi_{in}\rangle$, exprimés en fonctions des opérateurs de sortie.

Exemples :

lame semi transparente (on appelle out1 la sortie côté in transmis et out2 la sortie côté in réfléchi et on prend t et r réels):

$$\begin{aligned} a_{out1} &= t a_{in} + r a_v \text{ et } a_{out2} = t a_v - r a_{in} \Rightarrow \\ a_{in} &= t a_{out1} - r a_{out2} \text{ et } a_v = r a_{out1} + t a_{out2} \end{aligned} \quad (29)$$

(29) peut être établi directement en résolvant le système, où en appliquant le principe de retour inverse de la lumière.

exemple 1 :

$$\begin{aligned} |\psi_{in}\rangle &= |1_{in}, 0_v\rangle = a_{in}^\dagger |0_{in}, 0_v\rangle \\ |\psi_{out}\rangle &= a_{in}^\dagger |0_{out1}, 0_{out2}\rangle = (t a_{out1}^\dagger - r a_{out2}^\dagger) |0_{out1}, 0_{out2}\rangle = t |1_{out1}, 0_{out2}\rangle - r |0_{out1}, 1_{out2}\rangle \end{aligned} \quad (30)$$

exemple 2 :

$$\begin{aligned} |\psi_{in}\rangle &= |1_{in}, 1_v\rangle = a_{in}^\dagger a_v^\dagger |0_{in}, 0_v\rangle, \text{ état intriqué} \\ |\psi_{out}\rangle &= a_{in}^\dagger a_v^\dagger |0_{out1}, 0_{out2}\rangle = \left[tr(a_{out1}^\dagger a_{out1}^\dagger - a_{out2}^\dagger a_{out2}^\dagger) + (t^2 - r^2) a_{out1}^\dagger a_{out2}^\dagger \right] |0_{out1}, 0_{out2}\rangle \\ &= \sqrt{2} tr \left[|2_{out1}, 0_{out2}\rangle - |0_{out1}, 2_{out2}\rangle \right] + (t^2 - r^2) |1_{out1}, 1_{out2}\rangle \end{aligned} \quad (31)$$

On retrouve (7) du chapitre 1, mais cette fois avec le bon facteur de normalisation !

Chapitre 4: Squeezing ou compression du bruit

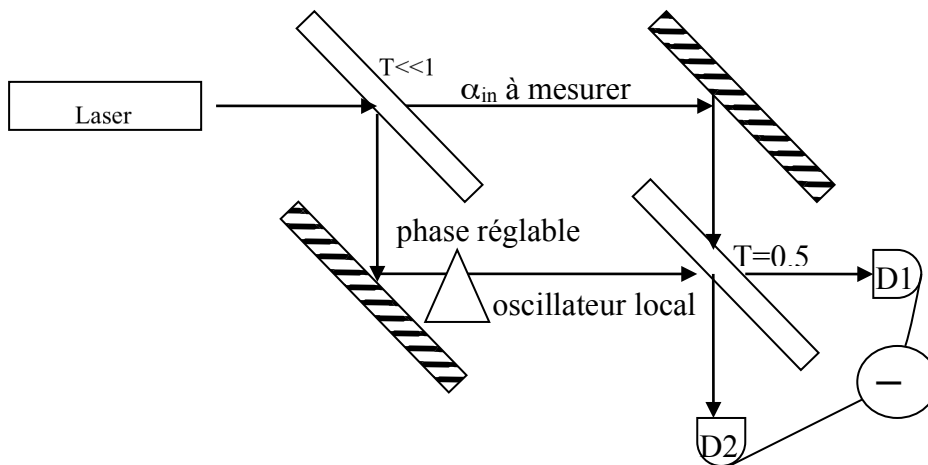
I) Introduction: mesure classique des fluctuations de phase et d'amplitude(BR p.206-207).

Le champ électrique, en tant que grandeur mesurable à l'aide d'un dispositif interférométrique, a une valeur entachée d'incertitude. Par exemple, pour un état cohérent, l'incertitude sur l'amplitude est due au bruit de photons, mais on peut aussi mesurer l'incertitude sur la phase

Classiquement, on écrira $E(t) = (E_0 + \Delta E_0(t) \cos(\omega t - \Delta\varphi(t)))$, soit, si $\Delta E_0(t) \ll E_0$ et $\Delta\varphi(t) \ll 2\pi$: $E(t) = E_0 \cos(\omega t) + \Delta E_0(t) \cos(\omega t) + \Delta\varphi(t) \sin(\omega t)$ (32)

ou, en notations complexes : $E = E_0 + \Delta X_1 + j\Delta X_2$ (on verra apparaître plus tard l'intérêt de ce changement de notation)

Il est possible de mesurer l'incertitude sur la phase par détection homodyne :



L'amplitude de l'oscillateur local s'écrit : $\alpha_{LO} = E_0 + \Delta X_{1LO} + j\Delta X_{2LO}$, tandis que le champ à mesurer est donné par : $\alpha_{in} = \alpha + \Delta X_{1in} + j\Delta X_{2in}$.

Le champ sur les photodiodes est donné par :

$$\alpha_{D1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_{LO} + \alpha_{in}), \quad \alpha_{D2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_{LO} - \alpha_{in})$$

$$\text{soit une différence des intensités } I_- = \frac{|\alpha_{D1}|^2 - |\alpha_{D2}|^2}{2} = \frac{(\alpha_{LO} \alpha_{in}^* + \alpha_{LO}^* \alpha_{in})}{2} \quad (33)$$

Le point clef de ce qui suit tient en ce que les termes de fluctuation sur le champ et sur l'oscillateur local ont le même ordre de grandeur. Le calcul quantique serait immédiat (voir TD2). Une manière plus classique, quoique pas totalement, de le voir est de remarquer que l'écart type sur l'intensité est égal à $|\Delta X| |\alpha|$, soit un rapport signal sur bruit de $|\alpha| / (|\Delta X| |\alpha|) = |\alpha| / |\Delta X|$. Or, ce rapport signal sur bruit est proportionnel, pour un état cohérent à la racine du nombre de photons, soit proportionnel à $|\alpha|$. En d'autres termes, deux états cohérents ont des fluctuations du champ d'amplitude égale, même

si ces états ont des amplitudes très différentes (et donc des fluctuations d'intensité de grandeur différente).

$$\text{D'où : } \alpha_{LO} \gg \alpha_{in} \Rightarrow \Delta X_{in} \cdot \alpha_{LO} \gg \Delta X_{LO} \alpha_{in} \quad (34)$$

La phase par rapport au champ à mesurer de l'oscillateur local, φ_{LO} , est réglable. D'où (33) se réécrit, en tenant compte de (34) :

$$I_- \approx |E_0 \alpha_{in}| \cos(\varphi_{LO}) + E_0 (\Delta X_{1in}(t) \cos(\varphi_{LO}) + \Delta X_{2in}(t) \sin(\varphi_{LO})) \quad (35)$$

Dans (35), la dépendance temporelle des fluctuations est indiquée explicitement pour souligner que le premier terme est un terme de fond continu : il est facilement éliminé par filtrage. On accède alors à $\Delta X_{1in}(t)$ ou $\Delta X_{2in}(t)$ ou toute combinaison des deux en réglant la phase de l'oscillateur local.

On peut aussi écrire la variance de cette différence d'intensité :

$$\langle \Delta I_-^2 \rangle = E_0^2 \left(\langle \Delta X_{1in}^2 \rangle \cos^2(\varphi_{LO}) + \langle \Delta X_{2in}^2 \rangle \sin^2(\varphi_{LO}) \right) \quad (36)$$

On verra dans le TD 2 que tout le raisonnement ci-dessus peut s'étendre au cas quantique. Un point clef est que toutes les voies de la deuxième lame semi-transparente sont occupées: une voie vide n'a pas été oubliée. Aussi (36) permet de mesurer les propriétés quantiques de α_{in} (ce peut être du vide quantique !), voir TD2.

La page suivante présente la première réalisation expérimentale de la compression du vide : on verra dans le TD2 que, si le vide comprimé n'est en rien du vide (il est composé de paires de photons avec une moyenne calculable, dernière question du TD), il fluctue "moins" que le vide, dans le sens que les fluctuations sur la quadrature adéquate, mesurées comme en (36), sont inférieures à celles obtenues pour $|\alpha_{in}\rangle = |0\rangle$.

$|\alpha_{in}\rangle = |0\rangle$ permet de calibrer l'interféromètre au niveau du "bruit quantique standard" (shot noise limit ou SNL) (trace (i) dans la figure 9.29 (a) page suivante). En faisant varier la phase de l'oscillateur local (abscisse de cette même figure), on obtient avec du vide comprimé la courbe (ii) : la compression est obtenue pour les phases où cette courbe passe en dessous du SNL.

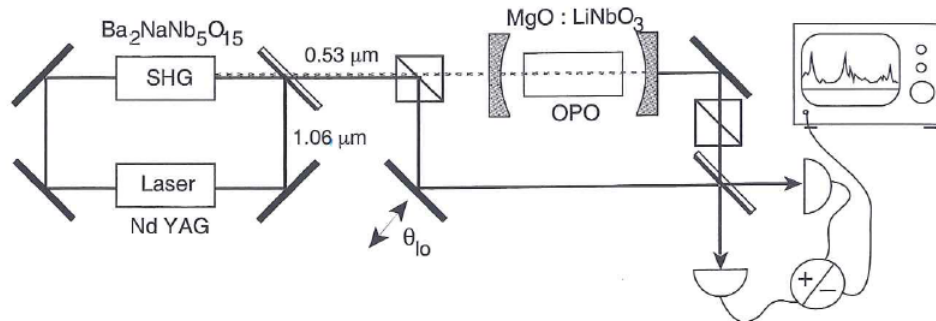


Figure 9.28: The schematic layout of the experiment by Wu et al. [Wu87] generating a squeezed vacuum state with a sub threshold OPO.

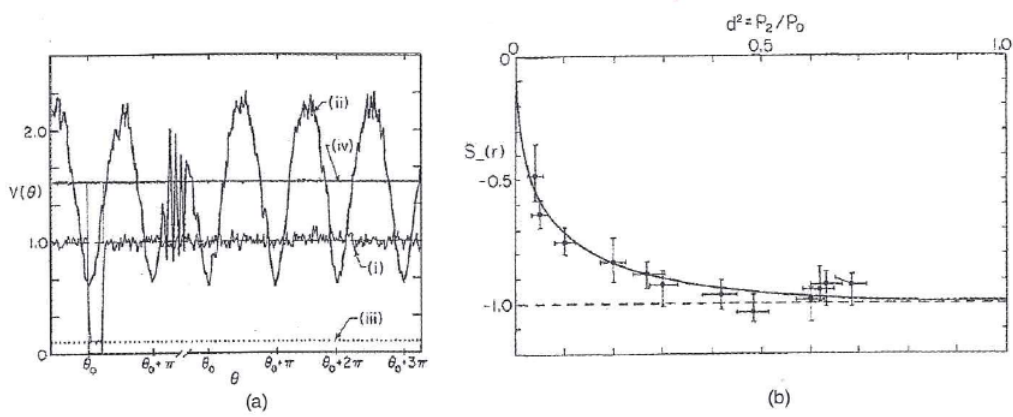


Figure 9.29

BR p. 266-267

Intrication en polarisation TD 1 Optique quantique master 1. (MW p;648)

Un processus tel qu'une cascade radiative à 2 étages d'un atome ou une conversion paramétrique spontanée dans un cristal K_{hi2} produit des paires de photons dits "intriqués" de fonction d'onde non séparable :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_{1x}, 0_{1y}, 0_{2x}, 1_{2y}\rangle - |0_{1x}, 1_{1y}, 1_{2x}, 0_{2y}\rangle)$$

1x et 1y (2x et 2y) désignent deux directions de polarisation orthogonales entre elles et orthogonales à la direction de propagation du photon 1 (du photon 2). Les photons 1 et 2 peuvent être très éloignés, suite à une propagation dans des directions différentes depuis leur émission simultanée. Les polariseurs et détecteurs sont supposés tous de rendement quantique unité.

1) Quelle est la probabilité $P(1x: +)$ de détecter le photon 1 derrière un polariseur aligné suivant x ?

2) On détecte un photon 1 suivant x. Quelle est la probabilité $P(2y: + | 1x: +)$ de détecter un photon 2 suivant y ? (N.B. | signifie ici "sachant")

3) On tourne le polariseur 1 d'un angle θ_1 par rapport à x. Quelle est la probabilité $P(1\theta_1 : +)$ de détecter le photon 1 ?

Suggestion : associer au champ classique projeté sur le polariseur $E_1 = E_x \cos(\theta_1) + E_y \sin(\theta_1)$ un opérateur annihilation a_1 de même forme (quel est son commutateur ?) et calculer le nombre moyen de photons $\langle \psi | a_1^\dagger a_1 | \psi \rangle$.

4) Montrer que la probabilité conjointe de détecter 1 suivant θ_1 et 2 suivant θ_2 est donnée par:

$$\begin{aligned} P(1\theta_1 : + \text{ et } 2\theta_2 : +) &= \frac{1}{2} \left(\sin^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2) \cos^2(\theta_1) - 2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin^2(\theta_1 - \theta_2) \right) \end{aligned}$$

Suggestion : calculer $\langle \psi | a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 a_1 | \psi \rangle$.

5) En déduire la probabilité $P(2\theta_2 : + | 1\theta_1 : +)$

rappel : $P(A \text{ et } B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

6) On change la valeur de θ_1 alors que les photons 1 et 2 sont déjà séparés, en route vers les polariseurs. La probabilité $P(2\theta_2 : +)$ est-elle modifiée ? On répondra de trois façons (avec l'espoir d'obtenir trois fois le même résultat !):

- à l'aide de la question 3.

- en utilisant la question 5 et en calculant (simplement !) $P(2\theta_2 : + | 1\theta_1 : -)$.

- en se conformant à la causalité issue de la relativité restreinte.

TD 2: Quadratures, vide quantique et compression du bruit

On définit les opérateurs quadratures :

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a), \quad X_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a)$$

1) calculer le commutateur $[X_1, X_2]$

2) Correspondance classique : l'opérateur a étant associé à l'enveloppe d'un champ évoluant avec le temps en $e^{-j\omega t}$, à quelle dépendance temporelle sont associés respectivement X_1 et X_2 ?

3) Energie du vide : Calculer l'opérateur énergie $\frac{X_1^2 + X_2^2}{2}$ en fonction de a et a^\dagger . En déduire la valeur de $\left\langle 0 \left| \frac{X_1^2 + X_2^2}{2} \right| 0 \right\rangle$, appelée parfois énergie du vide (en photons par mode).

4) Energie du vide comprimé : Un amplificateur paramétrique dégénéré obéit aux équations couplées :

$$\begin{cases} \frac{da(z)}{dz} = g a^\dagger(z) \\ \frac{da^\dagger(z)}{dz} = g a(z) \end{cases}$$

Trouver les valeurs de $X_1(z)$ et $X_2(z)$ en fonction de $X_1(0)$ et $X_2(0)$. Calculer le nombre de photons moyens obtenus dans un mode à la sortie de l'amplificateur de longueur z , en l'absence de signal injecté.

5) Energie d'un état cohérent comprimé : même question pour un état cohérent $|\alpha\rangle$ injecté dans l'amplificateur. On considérera d'abord α réel (ce qui revient à injecter sur la quadrature amplifiée), puis α de phase quelconque : $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$. Dans les 2 cas, on donnera tout d'abord la valeur moyenne de l'opérateur énergie, à l'entrée puis à la sortie de l'amplificateur.

6) Variance d'un état cohérent : calculer la variance $\langle \Delta X_1^2 \rangle$ et $\langle \Delta X_2^2 \rangle$ des opérateurs quadratures appliqués à un état cohérent.

7) Extension 1 (facile) : même question à la sortie d'un amplificateur paramétrique dans lequel on injecte un état cohérent.

8) Extension 2 : variance du nombre de photons (long ...ou demandant de l'astuce) : calculer $\langle \Delta N^2 \rangle$ à la sortie d'un amplificateur paramétrique dans lequel on injecte un état cohérent.

Quelques formules utiles : $\cos^2(\varphi) = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}$, $\sin^2(\varphi) = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}$

$$\text{sh}(2a) = 2\text{sh}(a)\text{ch}(a); \quad \text{sh}^2(a) = \frac{\text{ch}(2a) - 1}{2}$$

TD3 : Interféromètre de Ramsey

Un atome à deux niveaux $|g\rangle$ et $|e\rangle$ interagit à la résonance avec un champ microonde classique issu d'une source unique dans deux cavités R1 et R2, réglées toutes deux de façon à ce que l'atome effectue une oscillation de Rabi correspondant à un quart de tour sur la sphère de Bloch. Le but de ce TD est de montrer que la probabilité de détecter en sortie l'un des niveaux oscille sinusoidalement en fonction du déphasage ϕ du champ microonde entre les deux cavités.

Cavité R1. Le champ E_1 est pris comme référence de phase réelle, ce qui, à la résonance, permet d'écrire l'hamiltonien d'interaction sous la forme :

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i\Omega_1/2 \\ i\Omega_1/2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ où } \Omega_1 \text{ est proportionnelle à } E_1.$$

1) Montrer que les vecteurs propres s'écrivent

$$|\psi_+\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|g\rangle + i|e\rangle), \quad |\psi_-\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(-|g\rangle + i|e\rangle), \text{ avec quelles valeurs propres ?}$$

2) L'atome est dans l'état $|g\rangle$ à $t=0$. Quel est son état pour $\Omega_1 t_1 = \pi/2$?

Cavité R2 En tenant compte des corrections de phase dues au déplacement de l'atome, le champ E_2 dans la deuxième cavité s'écrit $E_2 = E_1 \exp(i\phi)$, soit un nouvel

hamiltonien $H_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i\Omega_1/2 \exp(-i\phi) \\ i\Omega_1/2 \exp(i\phi) & 0 \end{bmatrix}$.

3) Montrer que les vecteurs propres s'écrivent :

$$|\psi_+\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(\exp(-i\phi/2)|g\rangle + i \exp(i\phi/2)|e\rangle), \quad |\psi_-\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\exp(-i\phi/2)|g\rangle + i \exp(i\phi/2)|e\rangle)$$

avec quelles valeurs propres ?

4) Que devient l'état de l'atome, entrant dans R2 dans l'état où l'a laissé R1 (la référence de phase prise pour E_2 permet d'ignorer le déphasage de l'état de l'atome entre R1 et R2) après une interaction de durée t_1 dans R2 ? Montrer que la probabilité de trouver l'atome dans l'état $|g\rangle$ est : $P(|g\rangle) = \sin^2(\phi/2)$.