

Optique quantique avancée. Cours de Eric Lantz.  
**La cohérence en optique classique et quantique**

**Bibliographie**

L. Mandel and E. Wolf, "Optical coherence and quantum Optics", Cambridge University Press

D.F. Walls and G.J. Milburn, "Quantum optics", 2nd Edition (2008), Springer

**Chapitre 1 : La cohérence du premier ordre en optique classique**

**I) Introduction**

1) Cohérence spatiale

La cohérence spatiale du premier ordre d'un faisceau est liée à la possibilité des différents points de ce faisceau de former des franges par division du front d'onde. Un faisceau cohérent (spatialement) donne des franges de visibilité unité.

La cohérence spatiale évolue au cours de la propagation. Par exemple, les différents points d'une étoile émettent de façon incohérente, mais une étoile vue de la terre apparaît comme ponctuelle et, de ce fait, possède une excellente cohérence spatiale. En fait, comme on le verra en détail par la suite, deux sources secondaires séparées de deux ou trois mètres permettront de former des franges de bonne visibilité alors que, pour les étoiles de fort diamètre angulaire, la visibilité chutera si on éloigne ces sources secondaires de plus de 5 mètres. On verra qu'on peut en déduire le diamètre angulaire de l'étoile, comme l'ont fait Michelson et Fizeau à l'aide de l'interféromètre du même nom (ne pas confondre avec l'interféromètre de Michelson-Morley). La surface transverse au faisceau dans laquelle deux sources secondaires peuvent interférer avec une bonne visibilité est appelée aire de cohérence. En général, les dimensions d'une aire de cohérence augmentent avec la distance de propagation depuis la source (en absence de systèmes optiques).

2) Cohérence temporelle

Elle est liée à la question : les différentes fréquences (longueurs d'onde) du faisceau, supposé cohérent spatialement, donnent-elles des franges (dans un interféromètre à deux ondes) qui se superposent ? Si oui, les franges seront de bonne visibilité et le faisceau sera temporellement cohérent.

3) Degré de cohérence du premier ordre

On peut écrire l'intensité dans un interféromètre à deux ondes sous la forme :

$$I = I_A + I_B + 2\gamma_{AB}^{(1)} \sqrt{I_A I_B} \cos(\varphi_A - \varphi_B) \quad (1)$$

où  $\gamma_{AB}^{(1)}$  est le degré de cohérence du premier ordre du faisceau. Clairement, on a  $0 \leq \gamma_{AB}^{(1)} \leq 1$ , et  $\gamma_{AB}^{(1)} = 0$  correspond à un faisceau incohérent (visibilité nulle des franges) et  $\gamma_{AB}^{(1)} = 1$  correspond à une cohérence parfaite. Ces considérations ont

leur part d'arbitraire puisque, par exemple, la lumière provenant d'une étoile pourra être considérée comme cohérente ou non suivant l'éloignement des sources secondaires.

Le reste de ce chapitre est consacré à calculer  $\gamma^{(1)}$ .

## II) Degré de cohérence temporelle

Une source polychromatique est caractérisée par sa densité spectrale de puissance  $B(\sigma)$ , où  $\sigma = 1/\lambda$  est le nombre d'onde.  $B(\sigma)$  est réel symétrique car transformée de Fourier d'une fonction d'autocorrélation.

On peut alors écrire l'interférogramme, exprimé en fonction de la différence de marche  $\delta$ , comme la somme des interférogrammes dus à chacune des longueurs d'onde :

$$I(\delta) \propto 2 \int_0^{\infty} B(\sigma) (1 + \cos(2\pi\delta\sigma)) d\sigma \quad (2)$$

On réécrit (2) en faisant apparaître le degré de cohérence temporelle  $\gamma_t^{(1)}(\delta)$  et un nombre d'onde moyen  $\sigma_0$ , choisi à peu près au centre du spectre :

$$I(\delta) = 2I_0(1 + \gamma_t^{(1)}(\delta) \cos(2\pi\delta\sigma_0 + \varphi_A(\delta))) \quad (3)$$

On en déduit que le degré de cohérence temporelle s'écrit :

$$\gamma_t^{(1)}(\delta) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma) \exp(i2\pi\delta\sigma) d\sigma \right|}{\int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma) d\sigma} \quad \text{avec } B(\sigma) = A(\sigma) * D(\sigma - \sigma_0) \quad (4)$$

$D(\sigma - \sigma_0)$  est une impulsion de Dirac centrée en  $\sigma_0$ .  $A(\sigma)$  est l'enveloppe lentement variable de  $B(\sigma)$  (voir cours ONL).  $A(\sigma)$  est centré autour de 0.

Pour démontrer (4) à partir de (2) et (3), ne pas oublier que  $B(\sigma)$  est réel symétrique et que  $\gamma_t^{(1)}(\delta)$  doit être normalisé de façon à valoir 1 si la source est monochromatique (si étendue spectrale très faible autour de  $\sigma_0$ ).

### Exemples :

$$B(\sigma > 0) = I_0 D(\sigma - \sigma_0) \text{ (Dirac centré en } \sigma_0 \text{)} : \gamma_t^{(1)}(\delta) = 1$$

$$B(\sigma) = \frac{I_0}{2\sqrt{\pi}\Delta\sigma} \exp\left(-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{(\Delta\sigma)^2}\right), \gamma_t^{(1)}(\delta) = \exp(-(\pi\Delta\sigma\delta)^2) : \text{les franges sont modulées par une enveloppe gaussienne, de visibilité non nulle tant que } \delta \text{ n'est pas grand devant } 1/\pi\Delta\sigma. 1/\Delta\sigma \text{ est appelée longueur de cohérence } L_c, \text{ ou, dans l'espace des temps, temps de cohérence : } \tau_c = 1/(\Delta\sigma c) = 1/\Delta\nu$$

La définition est imprécise : le temps de cohérence apparaît comme une demi largeur à  $\exp(-\pi^2)$  du maximum. On pourrait évidemment prendre la (pleine)

largeur à mi-hauteur (FWHM). Malgré cette imprécision,  $\tau_c$  peut être considéré comme la largeur d'un mode temporel

### Vers la cohérence quantique

Si on considère des champs quantiques (opérateurs), on peut éviter de définir précisément ce qu'est un mode en prenant des commutateurs faisant intervenir des impulsions de Dirac :

$$[a(t)a^\dagger(t')] = D(t - t') \quad (5)$$

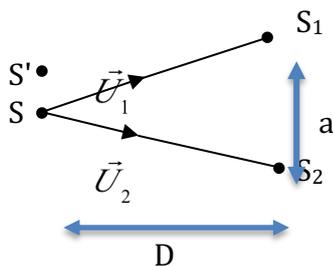
Ceci revient à considérer que le vide quantique est présent dans tout l'espace et à toutes les fréquences. Le système physique sélectionnera les modes adéquats.

Il peut être plus simple de considérer a priori que les effets quantiques n'apparaîtront que sur les modes d'entrée du système physique, avec des commutateurs unitaires. Dans ce cas, définir le nombre de modes et la taille de chaque mode devient important.

## II) Degré de cohérence spatiale

On veut, comme dans le domaine temporel, définir un lien entre la notion de cohérence spatiale et de mode spatial.

Pour fixer les idées, considérons un interféromètre à deux ondes équilibré et un éclairage (quasi)monochromatique. Alors, chaque point de la source primaire donne un réseau de franges  $2I_0(1 + \cos(2\pi\delta/\lambda))$ , où, en un point donné de l'interférogramme, la variable qu'il faudra intégrer n'est plus le nombre d'onde mais la différence de marche  $\delta$ , car à chaque point de la source primaire  $S$  est associée une valeur de  $\delta$ . L'évolution de cette valeur résulte d'un calcul vu dans le cours de deuxième année :



Considérons deux rayons (voir figure ci-contre) issus de  $S$  et de directions respectives  $\vec{U}_1$  et  $\vec{U}_2$ , passant par les sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$ . La différence de marche des chemins 1 et 2 jusqu'à ces sources secondaires s'écrit :

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = (SS_1 - SS_2)$$

Si la source est étendue, la différence des différences de marche entre  $S$  et un autre point de la source  $S'$  s'écrit :

$$d(\Delta\delta) = (\delta'_1 - \delta'_2) - (\delta_1 - \delta_2) = (\vec{U}_1 - \vec{U}_2) \cdot \overrightarrow{S'S} \quad (6)$$

Si  $(\vec{U}_1 - \vec{U}_2)$  et  $\overrightarrow{S'S}$  sont colinéaires, cette formule devient :

$$d(\Delta\delta) = S'S \left( 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \cong S'S \cdot \frac{a}{D}, \text{ si } a \ll D$$

Si  $S'S$  est la distance entre deux points d'une étoile dans une direction parallèle à  $S_1S_2$ , cette formule doit être écrite en fonction de la distance angulaire  $\theta = \frac{S'S}{D}$  entre ces deux points vus de la terre :

$$d(\Delta\delta) \cong a\theta \quad (7)$$

En un point M de coordonnée x dans la dimension transverse du plan de l'interférogramme parallèle à  $S_1S_2$ , l'intensité de l'interférogramme formé par une étoile s'écrit donc :

$$I(M) = \int_{\Omega} L(\theta, \varphi) \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{a}{\lambda} \left(\frac{x}{b} + \theta\right)\right)\right) d\theta d\varphi \quad (8)$$

Où  $\Omega$  est l'angle solide dans lequel le télescope recueille la lumière,  $L(\theta, \varphi)$  la luminance en un point du ciel (en  $W/m^2/strd$ ) et b la distance entre les sources secondaires et le plan de l'interférogramme. Il est à noter que, en l'absence d'absorption, la luminance se conserve.

Tout comme dans le cas temporel, on cherche à exprimer l'intensité de l'Eq (8) sous la forme de l'Eq.1, où intervient le degré de cohérence du premier ordre:

$$I = 2I_0 \left(1 + \gamma^{(1)} \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda b}\right)\right) \Rightarrow \gamma^{(1)} = \frac{\int_{\Omega} L(\theta, \varphi) \exp \left(i \frac{2\pi a\theta}{\lambda}\right) d\theta d\varphi}{\int_{\Omega} L(\theta, \varphi) d\theta d\varphi} \quad (9)$$

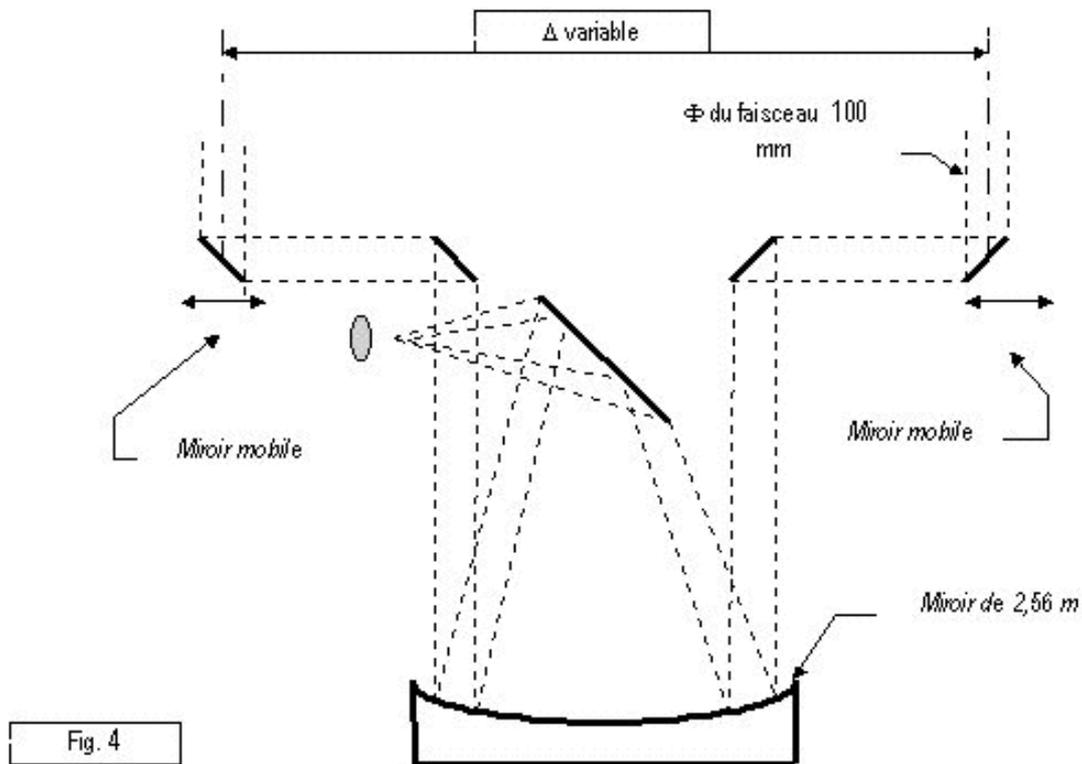
On reconnaît au dénominateur la transformée de Fourier, unidimensionnelle dans la direction  $S_1S_2$ , de la luminance, pour la valeur  $\frac{a}{\lambda}$ .

Exemple :  $L(\theta) = \text{rect} \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) \Rightarrow \gamma^{(1)} = \text{sinc} \left(\frac{\pi a\theta_0}{\lambda}\right)$

Cette fonction a un premier zéro pour  $a = \frac{\lambda}{\theta_0}$

Bételgeuse, une des étoiles au plus fort diamètre angulaire,  $\theta_0 = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{rd}$ , donne donc des franges de contraste nul pour  $a=2\text{m}$  environ. On peut voir cette distance comme la taille sur terre d'une cellule de cohérence de l'étoile : si les deux sources secondaires sont dans la même cellule de cohérence, elles produisent un interférogramme de bonne visibilité.

On remarque, sur le schéma de l'interféromètre stellaire de Michelson-Fizeau ci-dessous, que la distance a intervenant dans le calcul de la cohérence spatiale peut être différente de celle intervenant dans le calcul du pas des franges.



Interféromètre stellaire de Michelson-Fizeau (site astrosurf)

## Chapitre 2 : La cohérence du second ordre en optique classique et quantique

### I) Introduction à la cohérence du deuxième ordre

L'interféromètre stellaire de Michelson-Fizeau (à division du front d'onde, ne pas confondre avec l'interféromètre à division d'amplitude de Michelson-Morley, souvent appelé interféromètre de Michelson) n'a pas permis de résoudre des étoiles de diamètre inférieur à  $2 \cdot 10^{-7} rd$  car :

- Les chemins optiques doivent être contrôlés à la fraction de longueur d'onde
- La turbulence atmosphérique fait bouger les franges, ce qui les brouille si elles sont enregistrées avec une longue pause.

Dans cet interféromètre, la visibilité est liée à une corrélation des champs lumineux entre les deux sources secondaires. Il a été proposé en 1956 par Hanbury, Brown and Twiss d'utiliser la corrélation des intensités. Cette corrélation dans une cellule de cohérence est due au caractère agrégé (bunched) des photons : pour de la lumière thermique, la détection d'un photon double la probabilité d'en détecter un deuxième dans la même cellule de cohérence, voir TD1.

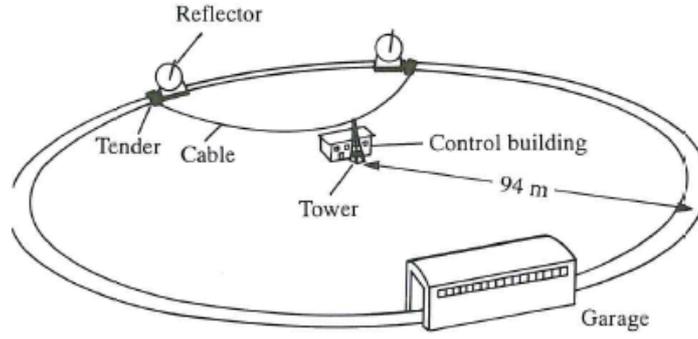


Fig. 9.9 The general layout of the intensity interferometer at the Narrabri Observatory. (After Brown, Davis and Allen, 1967a.)

(Image reproduite de Mandel et Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics)

Si les deux télescopes, respectivement 1 et 2, détectent de la lumière dans le même mode, à la fois temporel et spatial, on aura  $\frac{\langle N_1 N_2 \rangle}{\langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle} = 2$ , et ceci même si le nombre de photons par mode (par exemple  $\langle N_1 \rangle$ ) est très inférieur à 1, ce qui rend la statistique thermique, ou de Bose-Einstein, très proche d'une statistique poissonnienne. En revanche, si les deux télescopes détectent dans des modes différents  $\frac{\langle N_1 N_2 \rangle}{\langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle} = 1$ .

## II) Lien entre cohérence du second et du premier ordre

Les considérations intuitives ci-dessus reposent sur le fait que la notion de mode spatio-temporel est, pour de la lumière thermique, la même quand on considère les champs électriques (degré de cohérence du premier ordre  $\gamma^{(1)}$ ) ou les intensités (degré de cohérence du second ordre  $g_2$  défini en TD). Cette équivalence vient du fait qu'on a supposé dans les deux cas qu'il n'y avait aucune relation de phase entre les différents points de la source primaire. Une démonstration plus précise utilise le Théorème de Wick :

Théorème de Wick : pour des variables gaussiennes, les moments croisés d'ordre supérieur à 2 peuvent toujours être exprimés à l'aide des moments d'ordre 1 et 2.

En particulier, soient 4 variables Gaussiennes  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , on a :

$$\langle u_1 u_2 u_3 u_4 \rangle = \langle u_1 u_2 \rangle \langle u_3 u_4 \rangle + \langle u_1 u_3 \rangle \langle u_2 u_4 \rangle + \langle u_1 u_4 \rangle \langle u_2 u_3 \rangle$$

Les champs électriques obéissent à une statistique gaussienne, d'où :

$$\begin{aligned} \langle I_1(\xi) I_2(\eta) \rangle &= \langle u_1(\xi) u_1^*(\xi) u_2(\eta) u_2^*(\eta) \rangle = \\ &= \langle I_1(\xi) \rangle \langle I_2(\eta) \rangle + \langle u_1(\xi) u_2(\eta) \rangle \langle u_1^*(\xi) u_2^*(\eta) \rangle + \langle u_1(\xi) u_2^*(\eta) \rangle \langle u_1^*(\xi) u_2(\eta) \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

Le deuxième terme de la deuxième ligne de l'Eq. (10) est clairement nul. Quant au troisième terme, sa valeur a été calculée au paragraphe précédent. Ce n'est pas évident et, pour le montrer, il faut changer de point de vue. Dans l'expérience des

trous d'Young, on a défini  $\gamma^{(1)}$  comme la visibilité des franges et on a calculé l'interférogramme comme la somme des interférogrammes dus aux différents points de la source primaire, sans relation de phase entre eux. On va maintenant chercher à l'exprimer comme la somme des ondes venant des sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$ , avec l'idée que l'interférogramme en  $M$  n'aura une bonne visibilité que si les ondes en  $S_1$  et  $S_2$  ont une forte corrélation en phase. Exprimons tout d'abord le champ en  $M$  à l'aide des champs en  $S_1$  et  $S_2$  :

$$E(M, t) = K_1 u\left(S_1, t - \frac{r_1}{c}\right) + K_2 u\left(S_2, t - \frac{r_2}{c}\right) \quad (11)$$

Soit, pour l'intensité en  $M$  :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + \left[ K_1 K_2^* \langle u\left(S_1, t - \frac{r_1}{c}\right) u^*\left(S_2, t - \frac{r_2}{c}\right) \rangle + c.c \right] \quad (12)$$

Où c.c. signifie complexe conjugué et  $r_1$  est la distance  $S_1 M$  (de même pour  $r_2$ )

SI  $I_1(M) = I_2(M) = I_0$ , ou  $K_1 = K_2 = K$ , on peut comparer cette expression à l'Eq. (9):

$$I = 2I_0 \left( 1 + \gamma^{(1)} \cos\left(2\pi \frac{ax}{\lambda b}\right) \right). \text{ On en déduit, y compris pour } K_1 \neq K_2 :$$

$$\gamma^{(1)}(M) = \left| \langle u\left(S_1, t - \frac{r_1}{c}\right) u^*\left(S_2, t - \frac{r_2}{c}\right) \rangle \right|, \quad 0 < \gamma^{(1)}(M) < 1 \quad (13)$$

La moyenne porte sur le temps, puisque  $S_1$  et  $S_2$  sont quasi ponctuelles, mais reflète le fait que les champs en  $S_1$  et  $S_2$  sont la somme des champs dus aux différents points de la source primaire et ont donc une statistique thermique. Comme on prend le module, la valeur de  $\gamma^{(1)}(M)$  n'oscille pas sur une longueur d'onde en fonction de la différence de marche  $r_1 - r_2$ , mais dépend néanmoins de  $M$  (perte de cohérence au-delà d'une certaine valeur de  $|r_1 - r_2|$ ).

$\gamma^{(1)}(M)$  est réel positif et normalisé. On définit aussi la version le degré de cohérence complexe non normalisé :

$$\Gamma_{12}^{(1)}(\tau) = K_1 K_2^* \langle u(S_1, t) u^*(S_2, t + \tau) \rangle \quad (14)$$

Et le degré de cohérence complexe normalisé :

$$\gamma_{12}^{(1)}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}^{(1)}(\tau)}{\left(\Gamma_{11}^{(1)}(0) \Gamma_{22}^{(1)}(0)\right)^{1/2}} \quad (15)$$

$$\text{Par exemple } I_1(M) = \Gamma_{11}^{(1)}(0) = K_1 K_1^* \gamma_{11}^{(1)}(0)$$

### III) Cohérence du deuxième ordre et expérience de Hanbury, Brown and Twiss

L'Eq. (10) se réécrit comme :

$$\langle I_1(\xi)I_2(\eta) \rangle = \Gamma_{11}^{(1)}(0)\Gamma_{22}^{(1)}(0) + \left| \Gamma_{12}^{(1)}(\xi - \eta) \right|^2 \quad (16)$$

où  $\xi$  et  $\eta$  sont des variables temporelles au niveau, respectivement, des télescopes 1 et 2.

On en déduit la valeur du coefficient de cohérence normalisé du deuxième ordre :

$$g_{12}^{(2)}(\tau) \triangleq \frac{\langle I_1(\xi)I_2(\xi-\tau) \rangle}{\langle I_1(\xi) \rangle \langle I_2(\xi) \rangle} = 1 + \left| \gamma_{12}^{(1)}(\tau) \right|^2 \quad (17)$$

Si la distance entre les deux télescopes est supérieure à la taille de la cellule de cohérence spatiale, on a  $g_{12}^{(2)}(\tau) = 1, \forall \tau$  (voir Eq. (9) et les commentaires qui la suivent). Si, au contraire, cette distance est très inférieure à cette taille, on aura  $g_{12}^{(2)}(0) = g_{11}^{(2)}(0) = 2$ . Cependant, pour un "vrai" corps noir, comme une étoile, le temps de cohérence  $\tau > \tau_c$  de la lumière émise est très petit et  $g_{11}^{(2)}(\tau) = 1, si \tau > \tau_c$ . En termes d'analyse de Fourier, la densité spectrale de l'étoile est plus ou moins uniforme sur une large bande de fréquences  $\Delta\nu$ . On ne saura analyser le spectre du produit des intensités  $I_1I_2$  que sur une bande de fréquences  $B \ll \Delta\nu$ , ce qui mène à un signal utile :

$$s = \eta_1\eta_2 \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle \frac{B}{\Delta\nu} \quad (18)$$

où  $\eta$  désigne le rendement quantique. Ce signal peut être très inférieur au bruit de photons. Une analyse quantique, objet du TD 2, montre que, pour une détection résolvant le photon, la covariance entre deux détecteurs placés dans la même cellule de cohérence obéit à une équation similaire à l'Eq. (18). Cette covariance est mesurable et on la voit disparaître si les détecteurs ne sont plus dans la même cellule de cohérence.

Malgré la limitation du rapport signal sur bruit due à la bande passante des détecteurs, ce type de détection est beaucoup moins dépendant de la qualité de l'atmosphère, car indépendante de la phase.

### **Chapitre 3 : Les fonctions de corrélation quantiques et leur lien avec la cohérence.**

#### **I) Fonctions de corrélation**

##### **I.1) Intensité**

Rappels (eq. 16 cours master 1)

Opérateur champ électrique :

$$E(r, t) = E^+(r, t) + E^-(r, t) = \sum_i c_i \left[ a_i \exp(j(\vec{k}_i \vec{r} - \omega t)) - a_i^\dagger \exp(-j(\vec{k}_i \vec{r} - \omega t)) \right] \quad E^+ \rightarrow a_i \quad E^- \rightarrow a_i^\dagger \quad (19)$$

Considérons un état lumineux décrit par son opérateur densité  $\rho$ , c'est à dire comme un mélange statistique d'états purs  $|i\rangle$ , chacun avec une probabilité  $P_i$ .

Un exemple important est la lumière thermique, mélange statistique d'états de Fock  $|n\rangle$ , chacun avec une probabilité  $P(n) \propto \exp(-c \cdot n)$  où  $c$  est une constante : voir TD1. Des considérations de physique statistique montrent qu'un tel état, produit par une source thermique en équilibre avec un réservoir, n'admet pas de cohérences :  $\rho$  est diagonal.

Revenons au cas général. L'intensité moyenne acquise au point  $(r,t)$  s'écrit :  
 $\langle I(r,t) \rangle = \sum_i P_i \langle i | E^-(r,t) E^+(r,t) | i \rangle = \text{Tr}\{\rho E^-(r,t) E^+(r,t)\},$   
 $\rho = \sum_i P_i |i\rangle\langle i|$  (20)

## I.2) Fonctions de corrélation

Dans l'expression ci-dessus, apparaît le produit de deux champs au même point  $r$ . On définit une fonction de corrélation du premier ordre en étendant la définition à deux points différents de l'espace-temps :

soient :  $x \triangleq (r,t)$ ,  $x' \triangleq (r',t')$

Alors on définit :

$$G^{(1)}(x, x') = \text{Tr}\{\rho E^-(x) E^+(x')\}$$

Bien sûr,  $\langle I(x) \rangle = G^{(1)}(x, x)$ . La moyenne porte ici sur le temps.

On généralise à la fonction de corrélation d'ordre  $n$  :

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \text{Tr}\{\rho E^-(x_1) \dots E^-(x_n) E^+(x_{n+1}) \dots E^+(x_{2n})\}.$$
 (21)

## I.3) Propriétés des fonctions de corrélation

On sait que  $\text{Tr}\{\rho A^\dagger A\} \geq 0, \forall$  l'opérateur  $A$

d'où  $G^{(1)}(x, x) \geq 0$

et, en prenant  $A = \sum_j \lambda_j E^+(x_j)$ , on obtient :

$$\sum_{i,j} \lambda_i^* \lambda_j G^{(1)}(x_i, x_j) \geq 0 \Rightarrow \det [G^{(1)}(x_i, x_j)] \geq 0$$

$$\text{soit pour } n=2, G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2) \geq |G^{(1)}(x_1, x_2)|^2$$
 (22)

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

## I.2) Fonctions de corrélation temporelles et propriétés

Prenons  $x$  et  $x'$  au même point, mais en des temps différents :

$$x = (r, 0), \quad x' = (r, t)$$

soit :

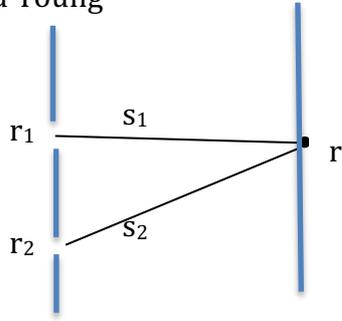
$$G_{ij}^{(2)}(t) \triangleq \text{Tr} \left\{ \rho E_i^-(x) E_i^-(x') E_j^+(x') E_j^+(x) \right\}$$

Alors, on démontre de façon analogue :

$$G_{11}^{(2)}(0) G_{22}^{(2)}(0) \geq \left| G_{12}^{(2)}(t) \right|^2 \quad (23)$$

## II) Corrélations et cohérence

### 1) Fentes d'Young



Admettons  $s_1 \cong s_2 \cong R$  et posons  $x_1 = \left( r_1, t - \frac{s_1}{c} \right), x_2 = \left( r_2, t - \frac{s_2}{c} \right)$

Alors l'intensité en  $r$  s'écrit :

$$\begin{aligned} I(r) &= \frac{1}{R^2} \left( G^{(1)}(x_1, x_1) + G^{(1)}(x_2, x_2) + 2 \text{Re} \left( G^{(1)}(x_1, x_2) \right) \right) \\ &= \frac{1}{R^2} \left( G^{(1)}(x_1, x_1) + G^{(1)}(x_2, x_2) + 2 \left| G^{(1)}(x_1, x_2) \right| \cos(\psi(x_1, x_2)) \right) \end{aligned}$$

$$\text{soit } g^{(1)}(x_1, x_2) \triangleq \frac{G^{(1)}(x_1, x_2)}{\left( G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2) \right)^{1/2}}$$

$$\text{et } \gamma(M) = \left| g^{(1)}(x_1, x_2) \right|, \quad \gamma_{12}(\tau) = g^{(1)}(x_1, x_2)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit  $\left| g^{(1)}(x_1, x_2) \right| \leq 1$

## III) Inégalités de Cauchy-Schwartz classiques et quantiques

$$\text{Rappelons l'Eq. 23 : } G_{11}^{(2)}(0) G_{22}^{(2)}(0) \geq \left| G_{12}^{(2)}(t) \right|^2$$

On démontre de même :  $\langle |I_1(x) I_2(x)|^2 \rangle \leq \langle |I_1(x)|^2 |I_2(x)|^2 \rangle$

Considérons le cas particulier  $\langle I_1(x) \rangle = \langle I_2(x) \rangle$  et écrivons cette inégalité en termes d'opérateurs. Soient  $a_1$  et  $a_2$  deux opérateurs d'annihilation au point  $x$ , Cauchy-Schwartz s'écrit :

$$\langle a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \rangle^2 \leq \langle (a_1^\dagger a_1)^2 \rangle \langle (a_2^\dagger a_2)^2 \rangle \quad (24)$$

En optique classique, on en déduirait  $g_{12}^{(2)}(0) \leq g_1^{(2)}(0)$ . En optique quantique, on doit tenir compte du fait que la définition (21) des fonctions de corrélation fait intervenir les opérateurs dans l'ordre normal (opérateurs créations (dagues) à gauche des opérateurs annihilation). Dans le cas particulier  $\langle I_1(x) \rangle = \langle I_2(x) \rangle$  et en faisant apparaître l'ordre normal au second membre, (24) se réécrit :

$$\langle a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \rangle \leq \langle (a_1^\dagger)^2 (a_1)^2 \rangle + \langle a_1^\dagger a_1 \rangle$$

Soit, pour les fonctions de corrélation :

$$g_{12}^{(2)}(0) \leq g_1^{(2)}(0) + \frac{1}{\langle a_1^\dagger a_1 \rangle} \quad (25)$$

Exercice : Soit un amplificateur paramétrique non dégénéré

Soient  $n_1(0)$  et  $n_2(0)$  les nombres de photons à l'entrée de l'amplificateur,  $z=0$ , respectivement dans les modes 1 (signal) et 2 (idler).

- Ecrire une relation entre les nombres de photons  $n_1(L)$  et  $n_2(L)$  à la sortie de l'amplificateur,  $z=L$ .

- En déduire que, en l'absence de photons à l'entrée ( $n_1(0)=n_2(0)=0$ ), l'amplificateur paramétrique sature l'inégalité de Cauchy-Schwartz quantique.

