Math. Nachr. 198 (1999), 149–168

Compléments à un Résultat de Safarevic

Par Christian Maire à Besançon

(Reçu le 2.6.1996)

Abstract. Soient k un corps de nombres et p un nombre premier; notons par L la p-extension maximale de k non-ramifiée et non-complexifiée, et par G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/k)$. On se propose alors de montrer dans la continuité de travaux de SAFAREVIC, lorsque G est fini, l'existence d'un isomorphisme entre $H_2(G,\mathbb{F}_p)$ et un certain groupe de nombres de k.

1. Introduction

Soient k un corps de nombres, et p un nombre premier.

Lorsque L est la p-extension non-ramifiée, non-complexifiée, maximale de k, et $G = \mathrm{Gal}(L/k)$, SAFAREVIC [Sa] a établi l'existence d'une surjection Ω de $\frac{\Lambda}{k^{\times p}}$ vers $\left(H^2(G,\mathbb{F}_p)\right)^*$, où $\Lambda = \{x \in k^\times,\ (x) = \mathcal{Q}^p\}$ et où $*$ est le foncteur dual de Pontrjagin; on retrouve une bonne description de cette surjection dans un papier de KISILEVSKY et LABUTE [KL].

Dans ce papier, on se propose de donner un résultat plus précis que celui de SAFAREVIC, lorsque L/k est finie, en montrant l'existence d'un isomorphisme entre $\frac{\Lambda}{k^{\times p} N_{L/k} E_L^{\mathrm{ord}}}$ et $\left(H^2(G,\mathbb{F}_p)\right)^*$, où E_L^{ord} est le groupe des unités de L (§6, Corollaire 6.4 du Théorème 6.2).

En fait, on va se placer dans un cadre assez général en considérant des p-extensions Σ-ramifiées, S-décomposées, où $\Sigma = T \cup T_p$ ne contient que des places finies de k mais peut contenir des places au-dessus de p, et où $S = S_0 \cup S_\infty$, avec S_0 ne contenant que des places finies et S_∞ que des places infinies réelles.

On va définir dans un premier temps un symbole généralisé pour les extensions galoisiennes (§2), et donner quelques propriétés de ce symbole (§3).

Dans le Paragraphe 4, on construit l'homomorphisme Ω_Σ^S qui intervient dans le résultat principal; on calculera un certain noyau qui fait apparaitre, dans la situation

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 11R37.
Keywords and phrases. Symbole de réciprocité local, ramification modérée.

modérée ($T_p = \emptyset$), le groupe de nombres

$$\Lambda_m^S = \{x \in k^\times,\ (x) = Q^p Q_{S_0},\ x \in k_v^{\times p} \text{ pour tout } v \in T,\ x > 0 \text{ en dehors de } S_\infty\}.$$

On retrouvera alors un résultat analogue à un résultat de KOCH ([K1], Chapitre 11, Proposition 3.11):

Si k_T^S désigne la p-extension maximale de k, T-ramifiée modérée, S-décomposée, alors il existe une surjection Ω_T^S de $\frac{\Lambda_m^S}{k^{\times p}}$ vers $\left(\ker\left(H^2(G_T^S, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{inf} H^2(\overline{G}, \mathbb{F}_p)\right)\right)^*$, où $G_T^S = \mathrm{Gal}(k_T^S/k)$, $\overline{G} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, $\bar{k}$ étant la p-extension maximale de k.

Dans le Paragraphe 5, nous donnerons une application intéressante lorsque k contient μ_p; on obtient ainsi (Théorème 5.5):

Soient S un ensemble fini de places de k et Σ un ensemble fini "assez gros" de places finies de k. Alors on a l'injection $H^2(G_\Sigma^S, \mathbb{F}_p) \overset{inf}{\hookrightarrow} H^2(\overline{G}, \mathbb{F}_p)$, où $G_\Sigma^S = \mathrm{Gal}(k_\Sigma^S/k)$, k_Σ^S étant la p-extension maximale de k, Σ-ramifiée, S-décomposée.

Enfin le dernier paragraphe est consacré à la démonstration du résultat principal.

2. Définition du symbole généralisé

2.1. Situation

Soient p un nombre premier, et K/k une p-extension finie de groupe de Galois G.

On se fixe Σ et S deux ensembles finis, disjoints, de places de k: Σ est un ensemble de places finies de k, et est réunion de T avec T_p, où T ne contient que des places étrangères à p, et T_p que des places au-dessus de p; S est réunion de deux sous-ensemble S_0 et S_∞, où S_0 ne contient que des places finies ($S_0 \subset pl_{k,0}$, $pl_{k,0}$ étant l'ensemble des places finies de k), et où S_∞ ne contient que des places réelles ($S_\infty \subset pl_{k,\infty}^{re}$, $pl_{k,\infty}^{re}$ étant l'ensemble des places réelles de k). Pour $p \neq 2$, on suppose que $S_\infty = pl_{k,\infty}^{re}$.

A Σ on associe le module $\mathcal{M}$ de k suivant

$$\mathcal{M} = \prod_{v \in T} v \prod_{v \in T_p} v^{n_v(K/k)} = m m_p,$$

où $n_v(K/k)$ est le plus petit entier tel que tout élément de $U_{k_v}^{n_v(K/k)}$ est norme dans K_w/k_v, $w|v$ quelconque (on rappelle que si k_v est le complété de k en v, et π une uniformisante de k_v, alors le groupe multiplicatif $U_{k_v}^{n_v(K/k)}$ est le sous-groupe du groupe des unités U_{k_v} de k_v congrues à 1 modulo $\pi^{n_v(K/k)}$). L'extension K/k étant finie, $n_v(K/k)$ existe. L'introduction de T_p correspond à l'autorisation de ramification sauvage en p dans K/k.

A Σ et S, on associe le sous-groupe du groupe des idèles $\mathcal{J}_k$ de k suivant

$$\mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S = \prod_{v \in T} U_{k_v}^1 \prod_{v \in T_p} U_{k_v}^{n_v(K/k)} \prod_{v \in S} k_v^\times \prod_{v \notin S \cup \Sigma} U_{k_v}.$$

On leur associe également la p-extension maximale F de k, Σ-ramifiée, S-décomposée, incluse dans K; on rappelle que cela signifie que l'extension F/k est non-ramifiée pour les places finies en dehors de Σ et est totalement décomposée pour les places de S; en particulier, pour $v \in S_\infty$, v est réelle et reste réelle dans F; on ne parlera pas de ramification pour les places infinies, mais de complexification; d'autre part, on rappelle également que peuvent se ramifier dans K/k uniquement les places au-dessus de p, et les places v de k vérifiant $N_{k/\mathbb{Q}}v \equiv 1(p)$.

On peut noter que F est le sous-corps fixé par le sous-groupe H de G, engendré par

(a) les groupes de décomposition $D_w(K/k)$ des places $w|v$, $w \in pl_K$, $v \in S$;

(b) les groupes d'inertie $I_w(K/k)$ des places $w|v$, $w \in pl_{K,0}$, $v \notin \Sigma \cup S$.

Notons enfin par F' le sous-corps de K fixé par $H^p[G,H]$; on a $k \subset F \subset F' \subset K$.

2.2. Construction du symbole

Rappelons tout d'abord que le symbole de réciprocité local $(\cdot, K_w/k_v)$ donne un isomorphisme entre $\frac{k_v^\times}{N_{K_w/k_v}K_w^\times}$ et $D_w^{ab}(K/k)$, où $D_w^{ab}(K/k)$ désigne l'abélianisé de $D_w(K/k)$; de plus, si ε est élément de U_{k_v}, alors $(\varepsilon, K_w/k_v)$ appartient à $I_w^{ab}(K/k)$, i.e., à

$$\frac{I_w(K/k)}{I_w(K/k) \cap [D_w(K/k), D_w(K/k)]}.$$

Rappelons ensuite le résultat classique suivant:

Lemma 2.1. *Pour tout $w \in pl_{K,0}$,*

$$[D_w(K/k), D_w(K/k)] = [I_w(K/k), D_w(K/k)].$$

Alors, il est immédiat de voir que pour

(a) $w|v$, $w \in pl_{K,0}$, $v \notin \Sigma \cup S$,

$$[D_w(K/k), D_w(K/k)] \cap I_w(K/k) = [D_w(K/k), I_w(K/k)] \subset [G,H];$$

(b) $w|v$, $w \in pl_K$, $v \in S$,

$$[D_w(K/k), D_w(K/k)] \subset [G,H].$$

Ainsi, pour toute composante x_v de $x = (x_v)_v \in \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S$, et pour toute place $w \in pl_K$, $w|v$, le symbole $(x_v, K_w/k_v)$ est défini sur F' (F' étant le corps fixé par $H^p[G,H]$).

Remarque 2.2. Pour x_v composante de $x \in \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S$, le symbole $(x_v, K_w/k_v)$ restreint à F' peut être vu comme un relèvement en un élément de $D_w(K/k)$ restreint à F'.

Définition 2.3. On peut alors définir le symbole généralisé $\rho_{K/k,\Sigma}^S$:

$$\begin{aligned} \rho_{K/k,\Sigma}^S : \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S &\longrightarrow \frac{H}{H^p[H,G]} \\ (x_v)_v &\longmapsto \prod_{\substack{v \in pl_k \\ w|v \text{ qcque}}} (x_v, K_w/k_v) \bmod H^p[H,G]. \end{aligned}$$

Ici

$$\prod_{\substack{v\in pl_k\\ w|v \text{ qcque}}} (x_v, K_w/k_v) \bmod H^p[H,G]$$

signifie que l'on regarde le produit des restrictions à F' des symboles. On peut noter que le choix de $w|v$ n'intervient pas et que le produit est fini. Il est également immédiat de voir que par construction $\rho^S_{K/k,\Sigma}$ est surjectif.

Remarque 2.4. Si K/k est abélienne, alors $\rho^S_{K/k,\Sigma}$ coïncide avec le symbole usuel restreint au sous-corps fixé par H^p. Ainsi si $x \in k^\times \cap \mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}}$, alors $\rho^S_{K/k,\Sigma}(x) = 1$.

On peut noter que dans ce cas x est une S-unité congrue à 1 modulo $\prod_{v\in\Sigma} v^{n_v(L/k)}$. On notera $E^S_{k,\mathcal{M}_L}$ ce sous-groupe des S-unités de k; lorsque $\Sigma = \emptyset$ et $S = pl^{re}_{k,\infty}$, ce groupe est égal au groupe E^{ord}_k des unités de k au sens ordinaire; lorsque $\Sigma = S = \emptyset$, il est égal au groupe E^{res}_k des unités de k au sens restreint.

3. Propriétés du symbole

3.1. Restriction de symboles

On considère K/k et L/k deux p-extensions finies avec $K \subset L$.

Notons par $\mathcal{M}_L$, H_L et par $\mathcal{U}^S_{L,\mathcal{M}_L}$, le module, le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L/k)$ et le sous-groupe du groupe des idèles de k, associé à Σ, S, et L/k (cf. Paragraphe 2.1); de même, $\mathcal{M}_K$, H_K et $\mathcal{U}^S_{L,\mathcal{M}_K}$, désigneront les objets associés à K/k. Il est clair que $\mathcal{M}_K$ divise $\mathcal{M}_L$. Notons également par G_L le groupe de Galois de L/k, par G_K celui de K/k, et par $G_{L/K}$ celui de L/K.

On peut alors remarquer que $\dfrac{H_L G_{L/K}}{G_{L/K}} \simeq H_K$, et que

Lemma 3.1. ([M], Chapitre 4, Lemme 4.1.1.) *Nous avons l'isomorphisme suivant*

$$\frac{G_L}{G_{L/K}(H_L)^p[H_L,G_L]} \simeq \frac{G_K}{(H_K)^p[H_K,G_K]}.$$

Notons enfin par F_K et par F'_K (resp. F_L et F'_L) les sous-corps de K (resp. de L) fixés par H_K et par $(H_K)^p[H_K,G_K]$ (resp. H_L et $(H_L)^p[H_L,G_L]$); alors $F_L \cap K = F_K$ et $F'_L \cap K = F'_K$.

On peut définir le symbole généralisé associé à L/k:

$$\rho^S_{L/k,\Sigma} \; : \; \mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}_L} \longrightarrow \frac{H_L}{(H_L)^p[H_L,G_L]};$$

de même, on peut définir le symbole généralisé associé à K/k:

$$\rho^S_{K/k,\Sigma} \; : \; \mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}_K} \longrightarrow \frac{H_K}{(H_K)^p[H_K,G_K]}.$$

Il faut remarquer que $\rho^S_{K/k,\Sigma}$ est défini sur $\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}_L} \subset \mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}_K}$.

Pour $x \in \mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}_L}$, on désire regarder

$$(x_v, L_{\mathcal{W}}/k_v) \bmod G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L],$$

avec $\mathcal{W}|v$, $\mathcal{W} \in pl_L$, et x_v la v-composante de x.

On rappelle que ceci a bien un sens: En effet d'après la Remarque 2.2, $(x_v, L_{\mathcal{W}}/k_v) \bmod (H_L)^p[H_L, G_L]$ doit être vu comme un élément de $D_{\mathcal{W}}(L/k)$ restreint à F'_L, sous-corps de L fixé par $(H_L)^p[H_L, G_L]$. Ainsi

$$(x_v, L_{\mathcal{W}}/k_v) \bmod G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L]$$

doit être vu comme un élément de $D_{\mathcal{W}}(L/k)$ restreint au sous-corps fixé par $G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L]$, i.e., restreint à $F'_L \cap K$ $(= F'_K)$.

Notons ensuite que

(a) pour $x_v \in k_v^\times$, $v \in S$,

$$\begin{aligned} &(x_v, L_{\mathcal{W}}/k_v) \bmod G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L] \\ = \ &(x_v, L_{\mathcal{W}}/k_v) \bmod D_{\mathcal{W}}(L/K) \cdot [D_{\mathcal{W}}(L/k), D_{\mathcal{W}}(L/k)] \cdot G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L]; \end{aligned}$$

(b) pour $x_v \in U_{k_v}$, $v \in pl_{k,0}$, $v \notin \Sigma \cup S$,

$$\begin{aligned} &(x_v, L_{\mathcal{W}}/k_v) \bmod G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L] \\ = \ &(x_v, L_{\mathcal{W}}/k_v) \bmod D_{\mathcal{W}}(L/K) \cdot [I_{\mathcal{W}}(L/k), D_{\mathcal{W}}(L/k)] \cdot G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L]. \end{aligned}$$

Or pour $x_v \in k_v^\times$, $v \in S$, $(x_v, L_{\mathcal{W}}/k_v) \bmod D_{\mathcal{W}}(L/K) \cdot [D_{\mathcal{W}}(L/k), D_{\mathcal{W}}(L/k)]$ doit être vu comme la restriction de $(x_v, L_{\mathcal{W}}/k_v)$ au sous-corps de L fixé par $D_{\mathcal{W}}(L/K) \cdot [D_{\mathcal{W}}(L/k), D_{\mathcal{W}}(L/K)]$. Par la propriété du symbole de réciprocité local, on a

$$(x_v, L_{\mathcal{W}}/k_v) \bmod D_{\mathcal{W}}(L/K) \cdot [D_{\mathcal{W}}(L/k), D_{\mathcal{W}}(L/k)] = (x_v, K_w/k_v).$$

Ainsi,

$$(x_v, L_{\mathcal{W}}/k_v) \bmod G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L] = (x_v, K_w/k_v) \bmod G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L].$$

Or, $(x_v, K_w/k_v) \bmod G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L]$ doit être vu comme un élément de $D_w(K/k)$ restreint au sous-corps de L fixé par $G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L]$. Par le Lemme 3.1, on a finalement

$$(x_v, K_w/k_v) \bmod G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L] = (x_v, K_w/k_v) \bmod (H_K)^p[H_K, G_K].$$

Il en est de même pour $x_v \in U_{k_v}$, avec $v \in pl_{k,0}$, $v \notin \Sigma \cup S$.

On a alors le résultat suivant:

Proposition 3.2. *Soient L/k et K/k deux p-extensions finies avec $K \subset L$; F'_L désigne le sous-corps de L fixé par $(H_L)^p[H_L, G_L]$ et $F'_K = F'_L \cap K$, i.e. F'_K est le sous-corps fixé par $G_{L/K}(H_L)^p[H_L, G_L]$.*

Alors pour tout x de $\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}_L}$, la restriction de $\rho^S_{L/k,\Sigma}(x)$ à F'_K est égale à $\rho^S_{K/k,\Sigma}(x)$.

3.2. Limite de symboles

Soient L/k une pro-p-extension, et $(L_i)_{i\in I}$ une famille de p-extensions finies sur k, avec $\bigcup_{i\in I} L_i = L$.

Pour L/k, $v \in T_p$, définissons par $n_v(L/k)$ le plus petit élément de $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ tel que pour tout $i \in I$, pour tout $w|v$, $w \in pl_{L_i}$, $\left(U_{k_v}^{n_v(L/k)}, L_{i,w}/k_v\right) = 1$. On peut noter que $n_v(L/k)$ ne dépend pas du choix de la famille $(L_i)_{i\in I}$. Posons

$$\mathcal{M}_L = \prod_{v\in T} v \prod_{v\in T_p} v^{n_v(L/k)}.$$

Notons par $\rho^S_{L_i/k,\Sigma}$ le symbole généralisé associé à Σ, S, et L_i/k; ce symbole peut être défini sur $\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}_L}$, où

$$\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}_L} = \prod_{v\in T} U^1_{k_v} \prod_{v\in T_p} U_{k_v}^{n_v(L/k)} \prod_{v\in S} k_v^\times \prod_{v\notin\Sigma\cup S} U_{k_v},$$

avec $U_{k_v}^{n_v(L/k)} = 1$, si $n_v(L/k) = \infty$.

Ainsi, on a

$$\rho^S_{L_i/k,\Sigma} : \mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}_L} \longrightarrow \frac{H_i}{(H_i)^p[H_i,G_i]},$$

où $G_i = \mathrm{Gal}(L_i/k)$, et où H_i est le sous-groupe de G_i engendré par les groupes de décomposition dans L_i/k des places $w|v$, $w \in pl_{L_i}$, $v \in S$, et par les groupes d'inertie dans L_i/k des places $w|v$, $w \in pl_{L_i,0}$, avec $v \notin \Sigma\cup S$. On peut noter que $\rho^S_{L_i/k,\Sigma}$ est surjectif.

Le système

$$\left(\frac{H_i}{(H_i)^p[H_i,G_i]}\right)_{i\in I}$$

muni des restrictions $G_j \to G_i$, $L_i \subset L_j$, est projectif. Sa limite s'identifie à $\frac{H_L}{(H_L)^p[H_L,G_L]}$ où $G_L = \mathrm{Gal}(L/k)$, et où H_L est le sous-groupe de G_L engendré par les limites projectives des groupes de décompositon $(D_w(L_i/k))_{i\in I}$, $w|v$, $v \in S$, et par les limites projectives des groupes d'inertie $(I_w(L_i/k))_{i\in I}$, $w|v$, $w \in pl_{L_i,0}$, $v \notin \Sigma\cup S$. De ce fait on peut définir $\rho^S_{L/k,\Sigma}$.

Définition 3.3. Pour une pro-p-extension L/k, on définit un symbole généralisé $\rho^S_{L/k,\Sigma}$ comme suit

$$\begin{aligned}\rho^S_{L/k,\Sigma} : \mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}_L} &\longrightarrow \frac{H_L}{(H_L)^p[H_L,G_L]}\\ x = (x_v)_v &\longmapsto \left(\rho^S_{L_i/k,\Sigma}(x)\right)_{i\in I}.\end{aligned}$$

Remarque 3.4. $\rho^S_{L/k,\Sigma}$ est surjectif.

De plus, si L/k est une pro-p-extension abélienne, alors

$$\forall\, x \in k^\times \cap \mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}_L}, \quad \rho^S_{L/k,\Sigma}(x) = 1.$$

3.3. Action sur une norme globale

Soient L/k et K/k deux p-extensions finies, $K \subset L$; on se place dans la situation où la ramification est modérée en prenant $T_p = \emptyset$. On reprend les notations du Paragraphe 3.1.

On peut définir le symbole généralisé de L/k, associé à T et à S:

$$\rho^S_{L/k,T} : \mathcal{U}^S_{k,m} \longrightarrow \frac{H_L}{(H_L)^p[H_L, G_L]},$$

où

$$\mathcal{U}^S_{k,m} = \prod_{v \in T} U^1_{k_v} \prod_{v \in S} k_v^\times \prod_{v \notin S \cup T} U_{k_v}, \quad m = \prod_{v \in T} v.$$

Pour l'extension L/K, nous définissons le symbole $\rho^S_{L/K,T}$:

$$\begin{aligned} \rho^S_{L/K,T} : \mathcal{U}^S_{K,m} &\longrightarrow \frac{H_{L/K}}{(H_{L/K})^p[H_{L/K}, G_{L/K}]} \\ (y_w)_w &\longmapsto \prod_{w \in pl_K} (y_w, L_{\mathcal{W}}/K_w) \bmod (H_{L/K})^p[H_{L/K}, G_{L/K}], \end{aligned}$$

où

1) $\mathcal{U}^S_{K,m} = \prod_{w \in T(K)} U^1_{K_w} \prod_{w \in S(K)} K_w^\times \prod_{w \notin S(K) \cup T(K)} U_{K_w}$,
2) $T(K) = \{w \in pl_K,\ w|v,\ v \in T\}$, $S(K) = \{w \in pl_K,\ w|v,\ v \in S\}$,
3) $G_{L/K} = \mathrm{Gal}(L/K)$,
4) $H_{L/K}$ est le sous-groupe de $G_{L/K}$ engendré par les groupes de décomposition dans L/K des places $\mathcal{W}|w$, $\mathcal{W} \in pl_L$, $w \in S(K)$ et par les groupes d'inertie dans L/K des places $\mathcal{W}|w$, $\mathcal{W} \in pl_{L,0}$, $w \notin S(K) \cup T(K)$.

Soit $y = (y_w)_w$ élément de $\mathcal{U}^S_{K,m}$; il est clair que $N_{K/k}y$ appartient à $\mathcal{U}^S_{k,m}$; ainsi $\rho^S_{L/k,T}(N_{K/k}y)$ est bien défini. Nous avons alors le résultat suivant:

Proposition 3.5. ([M], Chapitre 4, Proposition 4.1.2.) *Pour y élément de $\mathcal{U}^S_{K,m}$, nous avons*

$$\rho^S_{L/k,T}(N_{K/k}y) \equiv \rho^S_{L/K,T}(y) \bmod (H_L)^p[H_L, G_L].$$

Il faut noter que $\rho^S_{L/K,T}(y) \bmod (H_L)^p[H_L, G_L]$ doit être vu comme un élément du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/K)$, donc de $\mathrm{Gal}(L/k)$, restreint au sous-corps de L fixé par $(H_L)^p[H_L, G_L]$.

On a alors la proposition suivante:

Proposition 3.6. *Soit L/k une p-extension finie. On rappelle que H_L est le sous-groupe de $G_L = \mathrm{Gal}(L/k)$ engendré par les groupes de décomposition dans L/k des places $w|v$, $w \in pl_L$, $v \in S$, et par les groupes d'inertie dans L/k, des places $w \in pl_{K,0}$, $w|v$, $v \notin S \cup T$.*

Si K désigne le sous-corps de L fixé par H_L $(K = F_L)$, alors pour $x \in K^\times \cap \mathcal{U}^S_{K,m}$ $(= E^S_{K,m})$, nous avons

$$\rho^S_{L/k,T}(N_{K/k}x) = 1.$$

Proof. En appliquant la Proposition 3.5, on a pour $x \in E^S_{K,m}$

$$\rho^S_{L/k,T}\left(N_{K/k}x\right) \equiv \rho^S_{L/K,T}(x) \bmod (H_L)^p[H_L,G_L].$$

Or

$$\rho^S_{L/K,T}(x) \bmod (H_L)^p[H_L,G_L] = \rho^S_{L/K,T}(x) \bmod \mathrm{Gal}(L/F'_L)(H_{L/K})^p[H_{L/K},G_{L/K}],$$

où F'_L est le sous-corps fixé par ${H_L}^p[H_L,G_L]$. Notons ensuite que $\rho^S_{L/K,T}(x) \bmod \mathrm{Gal}(L/F'_L)(H_{L/K})^p[H_{L/K},G_{L/K}]$ est la restriction de $\rho^S_{L/K,T}(x)$ à $F'_L \cap F'_{L/K}$, où $F'_{L/K}$ est le sous-corps de L fixé par $(H_{L/K})^p[H_{L/K},G_{L/K}]$. En utilisant la Proposition 3.2, on a

$$\rho^S_{L/K,T}(x) \bmod (H_L)^p[H_L,G_L] = \rho^S_{F'_L/K,T}(x).$$

F'_L/K étant abélienne $\left(\text{de groupe de Galois égal à } \frac{H_L}{(H_L)^p[H_L,G_L]}\right)$, le symbole $\rho^S_{F'_L/K,T}$ coïncide avec le symbole usuel, et par conséquent $\rho^S_{F'_L/K,T}(x) = 1$. □

Corollary 3.7. *Supposons que la p-extension maximale K de k, T-ramifiée modérée, S-décomposée, est finie. Soit $\overline{K}$ une pro-p-extension contenant K; alors pour tout élément x de $E^S_{K,m}$, on a*

$$\rho^S_{\overline{K}/k,T}\left(N_{K/k}x\right) = 1.$$

4. Construction de Ω^S_T

4.1. Situation

Soit Σ' un ensemble de places finies de k, $\Sigma' = T \cup T'_p$, avec $(T',p) = 1$, et avec T'_p ne contenant que des places au-dessus de p. On peut noter que Σ' n'est pas nécessairement fini.

Soit S' un ensemble fini de places de k ($S' = S'_0 \cup S'_\infty$); on suppose Σ' et S' disjoints. Si $p = 2$, on suppose deplus que $S'_\infty = pl^{re}_{k,\infty}$.

Aux ensembles Σ' et S', on associe:

i) $k^{S'}_{\Sigma'}$: la p-extension maximale de k, Σ'-ramifiée, S'-décomposée,

ii) n'_v pour $v \in \Sigma'_p$: c'est le plus petit élément de $\mathbb{N} \cup \infty$ tel que tout élément de $U^{n'_v}_{k_v}$ soit norme locale dans toute extension galoisienne $K' \subset k^{S'}_{\Sigma'}$ finie sur k; $n'_v = 1$ pour $v \in T$,

iii) $\mathcal{M}' = \prod_{v\in T'} v \prod_{v\in T'_p} v^{n'_v}$,

iv) $\mathcal{U}^{S'}_{k,\mathcal{M}'} = \prod_{v\in T'} U^1_{k_v} \prod_{v\in T'_p} U^{n'_v}_{k_v} \prod_{v\in S'} k^\times_v \prod_{v\notin \Sigma'\cup S'} U_{k_v}$.

Soit $\Sigma \subset \Sigma'$ un ensemble fini de places finies de k ($\Sigma = T_p \cup T$) et soit S un ensemble fini de places de k ($S = S_0 \cup S_\infty$), avec S' inclus dans S.

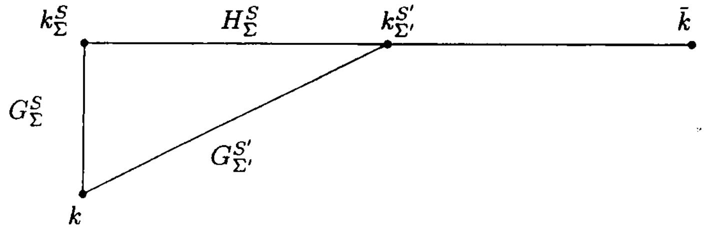
A Σ et S, on associe

i) k^S_Σ : la p-extension maximale de k, Σ-ramifiée, S-décomposée,

ii) $\mathcal{M} = \prod_{v\in T} v \prod_{v\in\Sigma} v^{n'_v}$, n'_v est relatif à $k^{S'}_{\Sigma'}$,

iii) $\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}} = \prod_{v\in T} U^1_{k_v} \prod_{v\in T_p} U^{n'_v}_{k_v} \prod_{v\in S} k_v^\times \prod_{v\notin\Sigma\cup S} U_{k_v}$.

On a alors le schéma suivant



où $G^{S'}_{\Sigma'} = \mathrm{Gal}(k^{S'}_{\Sigma'}/k)$, $G^S_\Sigma = \mathrm{Gal}(k^S_\Sigma/k)$, où $\bar{k}$ est la p-extension maximale de k, et où H^S_Σ est le sous-groupe de $G^{S'}_{\Sigma'}$ engendré par les groupes de décomposition dans $k^{S'}_{\Sigma'}/k$ des places $w|v$, $w \in pl_{k^{S'}_{\Sigma'}}$, $v \in S$, et par les groupes d'inertie dans $k^{S'}_{\Sigma'}/k$ des places $w|v$, $w \in pl_{k^{S'}_{\Sigma'},0}, v \notin \Sigma\cup S$.

Appliquant la suite de Hochschild-Serre à cette situation, on a alors la proposition suivante:

Proposition 4.1. ([M], Chapitre 4, Proposition 4.2.1.) *Nous avons la suite exacte suivante*

$$\left(\ker\left(H^2(G^S_\Sigma,\mathbb{F}_p) \hookrightarrow H^2(G^{S'}_{\Sigma'},\mathbb{F}_p)\right)\right)^* \hookrightarrow \frac{H^S_\Sigma}{(H^S_\Sigma)^p[H^S_\Sigma, G^{S'}_{\Sigma'}]} \longrightarrow {}_pG^{S'\,ab}_{\Sigma'} \twoheadrightarrow {}_pG^{S\,ab}_{\Sigma},$$

où ${}_pG^{ab}$ *est égal au quotient* $\frac{G}{G^p[G,G]}$.

4.2. Symbole généralisé dans $k^{S'}_{\Sigma'}/k$

En appliquant les résultats du Paragraphe 3 à l'extension $k^{S'}_{\Sigma'}/k$, et aux ensembles Σ et S, on définit le symbole $\rho^S_{k^{S'}_{\Sigma'}/k,\Sigma}$:

$$\rho^S_{k^{S'}_{\Sigma'}/k,\Sigma} : \mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}} \longrightarrow \frac{H^S_\Sigma}{(H^S_\Sigma)^p[H^S_\Sigma, G^{S'}_{\Sigma'}]}.$$

A partir ce symbole, on peut définir $\hat{\rho}^S_{k^{S'}_{\Sigma'}/k,\Sigma}$:

$$\begin{array}{rcl} \hat{\rho}^S_{k^{S'}_{\Sigma'}/k,\Sigma} : \dfrac{\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}}}{\left(\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}} \cap \mathcal{J}_k{}^p\right)\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}'}} & \longrightarrow & \dfrac{H^S_\Sigma}{(H^S_\Sigma)^p[H^S_\Sigma, G^{S'}_{\Sigma'}]} \\ x = (x_v)_v & \longmapsto & \rho^S_{k^{S'}_{\Sigma'}/k,\Sigma}(x). \end{array}$$

Remarque 4.2. Il est facile de voir que le symbole des éléments de $\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}} \cap \mathcal{J}_k{}^p$ appartient à $(H^S_\Sigma)^p$.

Remarque 4.3. Si $k_{\Sigma'}^{S'}/k$ est une pro-p-extension, avec $\bigcup_i K_i' = k_{\Sigma'}^{S'}$, alors $\hat{\rho}^S_{k_{\Sigma'}^{S'}/k,\Sigma}$ doit être vu comme limite projective de symboles, i.e. pour x de $\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}}$,

$$\hat{\rho}^S_{k_{\Sigma'}^{S'}/k,\Sigma}(x) = \varprojlim_i \left(\rho^S_{K_i'/k,\Sigma}(x)\right).$$

Si l'on reprend alors la suite exacte de la Proposition 4.1, on a:

Theorem 4.4. ([M], Chapitre 4, Théorème 4.2.1.) *Sous les hypothèses du Paragraphe 4, nous avons le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccccccc}
\left(\ker\left(H^2\left(G_\Sigma^S,\mathbb{F}_p\right)\to H^2\left(G_{\Sigma'}^{S'},\mathbb{F}_p\right)\right)\right)^* & \hookrightarrow & \dfrac{H_\Sigma^S}{(H_\Sigma^S)^p\left[H_\Sigma^S,G_{\Sigma'}^{S'}\right]} & \to & {}_pG_{\Sigma'}^{S'\,ab} & \twoheadrightarrow & {}_pG_\Sigma^{S\,ab} \\
\uparrow \Omega^{S',S}_{\Sigma',\Sigma} & & \uparrow \hat{\rho}^S_{k_{\Sigma'}^{S'}/k,\Sigma} & & \uparrow \Psi_{\Sigma'}^{S'} & & \uparrow \Psi_\Sigma^S \\
\ker(\eta) & \hookrightarrow & \dfrac{\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}}}{\left(\mathcal{U}^S_{k,\mathcal{M}}\cap \mathcal{J}_k{}^p\right)\mathcal{U}^{S'}_{k,\mathcal{M}'}} & \xrightarrow{\eta} & \dfrac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_k{}^p k^\times \mathcal{U}^{S'}_{k,\mathcal{M}'}} & \twoheadrightarrow & \dfrac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_k{}^p k^\times \mathcal{U}^{S'}_{k,\mathcal{M}'}}
\end{array}$$

où $\hat{\rho}^S_{k_{\Sigma'}^{S'}/k,\Sigma}$ est surjectif.

En particulier, on a l'existence d'un homomorphisme $\Omega^{S',S}_{\Sigma',\Sigma}$ de $\ker(\eta)$ *vers* $\left(\ker\left(H^2\left(G_\Sigma^S,\mathbb{F}_p\right)\to H^2\left(G_{\Sigma'}^{S'},\mathbb{F}_p\right)\right)\right)^*$.

Remarque 4.5. Ce diagramme, dans le cas de pro-p-extensions, doit être vu comme un diagramme de limites projectives: Si $k_{\Sigma'}^{S'}/k$ est une pro-p-extension, soit $(K_i')_{i\in I}$ une famille de p-corps galoisiens finis sur k, telle que $\bigcup_i K_i' = k_{\Sigma'}^{S'}$; à K_i', on associe le module

$$\mathcal{M}_{K_i'} = \prod_{v\in T_i'} v \prod_{v\in T_p'} v^{n'_{v,i}},$$

où T_i' est l'ensemble fini des places de k étrangères à p se ramifiant dans K_i'/k, et où $n'_{v,i}$ est le plus petit entier tel que tout élément de $U_{k_v}^{n'_{v,i}}$ est norme locale dans K_i'/k; bien entendu, on a

$$\bigcup_{i\in I} T_i' = T'.$$

Soit $K_i = K_i'\cap k_\Sigma^S$; il est clair que le système $(K_i)_{i\in I}$ forme un système inductif, de limite k_Σ^S; de plus K_i est le sous-corps de K_i' engendré par les groupes de décomposition dans K_i'/k des places de K_i' au-dessus de S, et par les groupes d'inertie dans K_i'/k des places finies de K_i' au-dessus des places de k qui ne sont pas dans $S\cup\Sigma$; en particulier, K_i/k est galoisienne.

Notons G_i' le groupe de Galois de K_i'/k, G_i celui de K_i/k, et H_i' celui de K_i'/K_i. Ainsi, on a

$$\frac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_k{}^p k^\times \mathcal{U}^{S'}_{k,\mathcal{M}'}} \simeq \varprojlim_i \frac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_k{}^p k^\times \mathcal{U}^{S'}_{k,\mathcal{M}_i'}} \quad \text{([G], §1, Corollaire 3)},$$

car $\frac{\mathcal{J}_k}{k^\times \mathcal{J}_k{}^p}$ est compact [AT].

Par maximalité de $k_{\Sigma'}^{S'}$, on remarque que

$$\varprojlim_i \frac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_k{}^p k^\times \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}'_i}^{S'}} \simeq \varprojlim_i \frac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_k{}^p k^\times N_{K'_i/k}\mathcal{J}_{K'_i}};$$

ainsi, $\Psi_{\Sigma'}^{S'}$ est défini comme suit

$$\Psi_{\Sigma'}^{S'} : \varprojlim_i \left(\frac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_k{}^p k^\times N_{K'_i/k}\mathcal{J}_{K'_i}}\right) \xrightarrow{\varrho_{K'_i/k}} \varprojlim_i \left({}_pG_i'^{ab}\right),$$

$\varrho_{K'_i/k}$ étant le symbole usuel.

De ceci, on déduit que $\Psi_{\Sigma'}^{S'}$ et Ψ_{Σ}^{S} sont des isomorphismes, et par conséquent que $\psi_{\Sigma',\Sigma}^{S',S}$ est surjectif.

4.3. Calcul de ker(η)

Afin que le diagramme du Théorème 4.4 soit complet, il ne reste plus qu'à déterminer ker(η). Tout d'abord, notons par $\Lambda_{\mathcal{M}}^S$ le groupe de nombres suivant

$$\Lambda_{\mathcal{M}}^S = \left\{x \in k^\times,\ (x) = \mathcal{Q}^p\mathcal{Q}_{S_0},\ x \in k_v^{\times p} U_{k_v}^{n'_v} \text{ pour tout } v \in \Sigma,\ x > 0 \text{ en dehors de } S_\infty\right\},$$

où $\mathcal{Q}_{S_0}$ est un idéal construit au-dessus de S_0. On peut noter que $k^{\times p} \subset \Lambda_{\mathcal{M}}^S$, et que pour $v \in T$,

$$x \in k_v^{\times p} U_{k_v}^1 \iff x \in k_v^{\times p}.$$

En ce qui concerne les places v de T_p, on peut avoir deux cas extrèmes: Si $n'_v = \infty$, alors $U_{k_v}^{n'_v} = 1$; si $n_v = 0$, l'information pour $v \in T_p$ dans $\Lambda_{\mathcal{M}}^S$ est vide.

On définit également $\Lambda_{\mathcal{M}'}^{S'}$ sur le même modèle:

$$\Lambda_{\mathcal{M}'}^{S'} = \left\{x \in k^\times,\ (x) = \mathcal{Q}^p\mathcal{Q}_{S'_0},\ x \in k_v^{\times p} U_{k_v}^{n'_v} \text{ pour tout } v \in \Sigma',\ x > 0 \text{ en dehors de } S'_\infty\right\}.$$

Remarquons ensuite que

$$\ker(\eta) = \frac{\mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S \cap \mathcal{J}_k{}^p k^\times \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}'}^{S'}}{\left(\mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S \cap \mathcal{J}_k{}^p\right)\mathcal{U}_{k,\mathcal{M}'}^{S'}}.$$

On a alors la proposition suivante:

Proposition 4.6. (Calcul de ker(η).) *On a l'isomorphisme suivant*

$$\ker(\eta) \overset{\omega}{\simeq} \frac{\Lambda_{\mathcal{M}}^S}{\Lambda_{\mathcal{M}'}^{S'}}.$$

Proof. On construit ω de la façon suivante:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S \cap \mathcal{J}_k{}^p k^\times \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}'}^{S'} & \longrightarrow & \dfrac{\Lambda_{\mathcal{M}}^S}{\Lambda_{\mathcal{M}'}^{S'}} \\ x \in \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S = j^p\alpha x' & \longmapsto & \omega(x) = \alpha \text{ modulo } \Lambda_{\mathcal{M}'}^{S'}, \end{array}$$

où $\alpha \in k^\times$, $j \in \mathcal{J}_k$, et $x' \in \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}'}^{S'}$.

Il est clair que ω est bien défini, surjectif, et que $(\mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S \cap \mathcal{J}_k{}^p)\mathcal{U}_{k,\mathcal{M}'}^{S'} \subset \ker(\omega)$ Réciproquement: soit $x = j^p\alpha x' \in \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S \cap \mathcal{J}_k{}^p k^\times \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}'}^{S'}$ tel que $\alpha \in \Lambda_{\mathcal{M}'}^{S'}$; alors il existe $u \in \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}'}^{S'}$, $y \in \mathcal{J}_k$ tel que $\alpha = uy^p$. Par conséquent, $x = (yj)^p ux'$, i.e. $x \in (\mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S \cap \mathcal{J}_k{}^p)\mathcal{U}_{k,\mathcal{M}'}^{S'}$ et ainsi

$$\ker(\omega) = (\mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S \cap \mathcal{J}_k{}^p)\, \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}'}^{S'} . \qquad \square$$

On peut conclure alors ce paragraphe par le théorème suivant:

Theorem 4.7. *Soient Σ un ensemble fini de places finies de k, et Σ' un ensemble de places finies de k contenant Σ; S et S' sont deux ensembles finis de places de k avec S' inclus dans S.*
$k_{\Sigma'}^{S'}$ désigne la p-extension maximale de k, Σ'-ramifiée, S'-décomposée;
$G_{\Sigma'}^{S'} = \mathrm{Gal}(k_{\Sigma'}^{S'}/k)$.
k_Σ^S désigne la p-extension maximale de k, Σ-ramifiée, S-décomposée;
$G_\Sigma^S = Gal(k_\Sigma^S/k)$.
Alors on a la surjection suivante

$$\frac{\Lambda_{\mathcal{M}}^S}{\Lambda_{\mathcal{M}'}^{S'}} \twoheadrightarrow \left(\ker\left(H^2(G_\Sigma^S, \mathbb{F}_p) \to H^2(G_{\Sigma'}^{S'}, \mathbb{F}_p)\right)\right)^*,$$

où

$$\Lambda_{\mathcal{M}}^S = \left\{x \in k^\times,\, (x) = \mathcal{Q}^p \mathcal{Q}_{S_0},\, x \in k_v^{\times p} U_{k_v}^{n'_v}\ \forall v \in \Sigma,\ x > 0 \text{ en dehors de } S_\infty\right\},$$

$$\Lambda_{\mathcal{M}'}^{S'} = \left\{x \in k^\times,\, (x) = \mathcal{Q}^p \mathcal{Q}_{S'_0},\, x \in k_v^{\times p} U_{k_v}^{n'_v}\ \forall v \in \Sigma',\ x > 0 \text{ en dehors de } S'_\infty\right\}.$$

Corollary 4.8. *On a l'injection suivante:*

$$\ker\left(H^2(G_\Sigma^S, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^2(\overline{G}, \mathbb{F}_p)\right) \hookrightarrow \left(\frac{\Lambda_{\mathcal{M}}^S}{k^{\times p}}\right)^*,$$

où $\overline{G} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

Proof. On applique le Théorème 4.7 avec Σ' égal à l'ensemble des places finies de k, et $S' = \emptyset$ pour $p = 2$, ou $S' = pl_{k,\infty}^{re}$ pour $p \neq 2$ (pour $v|p$, $n'_v = \infty$); dans ce cas, on a $\mathcal{U}_{k,\mathcal{M}'}^{S'} \subset \mathcal{U}_{k,\mathcal{M}}^S \cap \mathcal{J}_k{}^p$. Il suffit alors de noter que grâce au théorème de GRUNWALD ([AT], Chapitre 10, §1, Théorème 1), on a

$$\Lambda_{\mathcal{M}'}^{S'} = k^{\times p} . \qquad \square$$

Corollary 4.9. Situation modérée. *Si k_T^S désigne la p-extension maximale de k T-ramifiée modérée, S-décomposée, alors on a la surjection Ω_T^S suivante*

$$\frac{\Lambda_m^S}{k^{\times p}} \twoheadrightarrow \left(\ker\left(H^2(G_T^S, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^2(\overline{G}, \mathbb{F}_p)\right)\right)^*,$$

où $\Lambda_m^S = \{x \in k^\times, (x) = Q^p Q_{S_0}, x \in k_v^{\times p}\ \forall v \in T,\ x > 0$ *en dehors de* $S_\infty\}$, *et où* $G_T^S = \mathrm{Gal}(k_T^S/k)$.

4.4. Localisation

Dans ce paragraphe, on prend $\Sigma' = pl_{k,0}$, $S' = \emptyset$ si $p = 2$, ou $S' = pl_{k,\infty}^{re}$ si $p \neq 2$. Alors, $k_{\Sigma'}^{S'}$ est égal à $\bar{k}$, et $n'_v = \infty$ pour les places v divisant p.

On rappelle que Σ est un ensemble fini de places finies de k, $\Sigma = T \cup T_p$, et que S est un ensemble fini de places quelconques, avec $S \cap \Sigma = \emptyset$.

Pour une place v de pl_k, $\overline{G}_v$ désignera le p-groupe de Galois absolu de k_v, i. e., $\overline{G}_v$ est le groupe de Galois sur k_v de la p-extension maximale de k_v. Notons par $P^2(k, \mathbb{F}_p)$ l'homomorphisme canonique suivant:

$$P^2(k,\mathbb{F}_p)\ :\ H^2(\overline{G},\mathbb{F}_p) \longrightarrow \bigoplus_{v\in pl_k} H^2(\overline{G}_v,\mathbb{F}_p)\,.$$

On sait que $P^2(k, \mathbb{F}_p)$ est injectif, et que de plus si k contient μ_p, alors cette injection reste encore valable si l'on effectue la somme sur $pl_k \setminus \{v_0\}$, pour toute place v_0 de pl_k ([K1], §11, Propositions 11.1 et 11.2).

Considérons le court diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_\Sigma^S,\mathbb{F}_p) & \xrightarrow{inf} & H^2(\overline{G}(p),\mathbb{F}_p) \\ \Theta_\Sigma^S & \searrow & \downarrow\ P^2(k,\mathbb{F}_p) \\ & & \bigoplus_{v\in pl_k} H^2(\overline{G}_v,\mathbb{F}_p) \end{array}$$

où $\Theta_\Sigma^S = P^2(k, \mathbb{F}_p) \circ inf$.

Si l'on regarde la projection de l'image de Θ_Σ^S sur le facteur correspondant à v, on a alors le lemme suivant:

Lemma 4.10. *Pour toute place v finie n'appartenant pas à Σ, et pour toute place v de S_∞, on a:*

$$Im\left(H^2(G_\Sigma^S,\mathbb{F}_p) \longrightarrow H^2(\overline{G}_v,\mathbb{F}_p)\right) = 0\,.$$

Proof. Soit $v \in pl_k$; il faut remarquer que l'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_\Sigma^S,\mathbb{F}_p) & \xrightarrow{inf} & H^2(\overline{G},\mathbb{F}_p) \\ \downarrow res & & \downarrow res \\ H^2(D_w(k_\Sigma^S/k),\mathbb{F}_p) & \xrightarrow{inf} & H^2(\overline{G}_v,\mathbb{F}_p) \end{array}$$

où $D_w(k_\Sigma^S, \mathbb{F}_p)$ est le groupe de décomposition dans k_Σ^S/k d'une place quelconque w de k_Σ^S au-dessus de v (on doit voir ce diagramme comme étant un diagramme de limites).

On peut immédiatement noter que pour $w \in pl_{k_\Sigma^S}$, $w|v$, $v \in S$, le groupe $D_w(k_\Sigma^S/k, \mathbb{F}_p)$ est trivial.

Pour $v \in pl_{k,0}$, $v \notin \Sigma$, l'homomorphisme

$$H^2(D_w(k_\Sigma^S/k), \mathbb{F}_p) \xrightarrow{inf} H^2(\overline{G}_v, \mathbb{F}_p)$$

se décompose de la façon suivante

$$H^2(D_w(k_\Sigma^S/k), \mathbb{F}_p) \xrightarrow{inf} H^2(\mathrm{Gal}(k_v^{nr}/k_v), \mathbb{F}_p) \xrightarrow{inf} H^2(\overline{G}_v, \mathbb{F}_p)\,,$$

où k_v^{nr} est la p-extension maximale de k_v, non-ramifiée. Or on sait que $\mathrm{Gal}(k_v^{nr}/k_v) \simeq \mathbb{Z}_p$. Ainsi $H^2(\mathrm{Gal}(k_v^{nr}/k_v), \mathbb{F}_p)$ est trivial. □

Notons par $B(\Sigma, S)$ l'ensemble de places de k suivant

$$B(\Sigma, S) = \Sigma \cup pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty\,,$$

et par $\hat{B}(\Sigma, S)$

$$\hat{B}(\Sigma, S) = B(\Sigma, S) \setminus \{v_0\}\,,$$

où v_0 est une place quelconque de $B(\Sigma, S)$.

On a alors la proposition suivante:

Proposition 4.11. *On a l'égalité suivante*

$$\ker\left(H^2(G_\Sigma^S, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\Theta_\Sigma^S} \bigoplus_{v \in B(\Sigma,S)} H^2(\overline{G}_v, \mathbb{F}_p)\right) = \ker\left(H^2(G_\Sigma^S, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{inf} H^2(\overline{G}, \mathbb{F}_p)\right).$$

De plus si k contient μ_p, alors on peut remplacer $B(\Sigma, S)$ par $\hat{B}(\Sigma, S)$.

5. Cas particulier: $\mu_p \subset k$

Dans cette partie, on va supposer que k contient μ_p.

Pour T et S quelconques, rappelons tout d'abord la définition du groupe des S-classes de rayon m, noté $cl_{k,m}^S$:

$$cl_{k,m}^S = \frac{I_{k,T}}{P_{k,m}^{S_\infty}\langle S_0\rangle}\,, \tag{5.1}$$

où $m = \prod_{v \in T} v$, où $I_{k,T}$ est l'ensemble des idéaux de k étranger à T, et où

$$P_{k,m}^{S_\infty} = \{(x),\, x \in k^\times,\, x \equiv 1\,(m),\, x > 0 \text{ en dehors de } S_\infty\}\,.$$

On va alors appliquer le Corollaire 4.8 à la situation suivante:

(i) S est un ensemble fini de places de k, et on pose $m_0 = \prod_{v \in S_0} v$;

(ii) Σ ($\Sigma = T \cup T_p$) contient l'ensemble des places de k au-dessus de p;

(iii) Σ est tel que

$$cl_{k,m_0}^{pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty} = cl_{k,m_0}^{pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty}\langle \Sigma \rangle .$$

Ainsi, ici $cl_{k,m_0}^{pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty}$ est le groupe de Galois sur k de l'extension abélienne maximale de k, S_0-ramifiée, $pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty$-décomposée ([M], Chapitre 1, Proposition 1.1.2).

Définition 5.1. On dit que Σ est assez gros s'il vérifie (ii) et (iii).

Enonçons alors le résultat principal de ce paragraphe.

Proposition 5.2. *Sous les conditions précédentes, on a:*

$$\Lambda_{\mathcal{M}}^{S} = k^{\times p}.$$

Tout d'abord deux lemmes.

Lemma 5.3. *Pour $x \in \Lambda_{\mathcal{M}}^{S}$, l'extension $L = k(x^{1/p})/k$ est non-ramifiée pour les places finies en dehors de S_0, et est $\Sigma \cup pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty$-décomposée.*

Proof. On peut noter que l'extension L/k est cyclique de degré diviseur de p, et que que la ramification en S_0 est modérée. Par la théorie de KUMMER, seules les places au-dessus de (px) peuvent être ramifiées. Par hypothèse, $(x) = \mathcal{Q}^p \mathcal{Q}_{S_0}$, i.e., pour $v|(x)$, v ne divisant pas p, $v \notin S_0$, on a $v(x) \equiv 0\ (p)$, ainsi $w|v$ ne se ramifie pas dans L/k; pour $v|p$, on a $x \in k_v^{\times p}$, ainsi L/k est non ramifiée en $w|v$. En fait, on peut noter que les places au-dessus de p sont totalement décomposées dans L/k; il en est de même pour les places de T. Pour $p = 2$, en notant que x est positif en dehors de S_∞, il vient immédiatement que L/k est $pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty$-décomposée. □

Soit $\mathcal{B}$ un idéal de I_{k,S_0} (i.e., étranger à S_0); on sait par hypothèse que $\mathcal{B}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{B} = (\alpha) \prod_{v \in \Sigma} v^{a_v},$$

où $\alpha \in k_{m_0}^{+pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty} = \{x \in k^\times,\ x \boxminus 1\ (m),\ x > 0 \text{ en dehors de } pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty\}$.
On en déduit le lemme suivant:

Lemma 5.4. *Soient $x \in \Lambda_{\mathcal{M}}^{S}$, et $L = k(x^{1/p})$; alors pour tout $\mathcal{B} \in I_{k,S_0}$,*

$$\mathcal{B} = (\alpha) N_{L/k} \mathcal{D},$$

où $\alpha \in k_{m_0}^{+pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty}$, et $\mathcal{D} \in I_{L,S_0}$.

Proof of Proposition 5.2. Soit $x \in \Lambda_{\mathcal{M}}^{S}$, $L = k(x^{1/p})$; on va montrer que $\mathrm{Gal}(L/k)$ est trivial, ainsi il viendra que $\Lambda_{\mathcal{M}}^{S} = k^{\times p}$.

Par le Lemme 5.3, nous savons que L est inclus dans $\hat{L}$, où $\hat{L}$ désigne l'extension abélienne maximale de k, S_0-ramifiée modérée, $pl_{k\infty}^{re} \setminus S_\infty$-décomposée. Alors, par l'isomorphisme du corps de classes et avec (5.1),

$$\mathrm{Gal}(L/k) \simeq \frac{I_{k,S_0}}{P_{k,m_0}^{pl_{k,\infty}^{re}\setminus S_\infty} N_{L/k} I_{L,S_0}},$$

où $P_{k,m_0}^{pl_{k,\infty}^{re}\setminus S_\infty} = \left\{(\alpha),\, \alpha \in k_{m_0}^{+pl_{k,\infty}^{re}\setminus S_\infty}\right\}$. Par le Lemme 5.4, on en déduit donc l trivialité de $\mathrm{Gal}(L/k)$. [

On peut alors énoncer le Théorème 5.5 qui est une conséquence immédiate de l Proposition 5.2.

Theorem 5.5. *Soient p un nombre premier, et k un corps de nombres contenar μ_p.*

Soient S un ensemble fini de places de k et Σ un ensemble fini de places finies de k supposons Σ assez gros. Alors on a l'injection

$$H^2(G_\Sigma^S, \mathbb{F}_p) \hookrightarrow H^2(\overline{G}, \mathbb{F}_p),$$

où $G_\Sigma^S = \mathrm{Gal}(k_\Sigma^S/k)$, k_Σ^S étant la p-extension maximale de k, Σ-ramifiée, S décomposée.

Corollary 5.6. *Si Σ est assez gros (non nécessairement fini), alors on a l'injectio*

$$H^2(G_\Sigma^S, \mathbb{F}_p) \hookrightarrow \bigoplus_{\substack{v \in \mathcal{B}(\Sigma,S) \\ w|v \notin q}} H^2(D_w(k_\Sigma^S/k), \mathbb{F}_p).$$

6. Situation modérée

Dans cette partie, on se place dans la situation où la ramification est modéré $(T_p = \emptyset)$; on suppose que la p-extension maximale L $(= k_T^S)$ de k, T-ramifié modérée, S-décomposée, est finie. On rappelle que $E_{k,m}^S$ désigne le groupe des S unités de k congrues à 1 modulo m, c'est-à-dire

$$E_{k,m}^S = k^\times \cap \mathcal{U}_{k,m}^S,$$

où

$$\mathcal{U}_{k,m}^S = \prod_{v \in T} U_{k_v}^1 \prod_{v \in S} {k_v}^\times \prod_{v \notin S \cup T} U_{k_v}.$$

On supposera alors que $p \neq 2$, ou bien que $E_{k,m}^S = E_{k,m}^{\bar{S}}$, avec $\bar{S} = S \cup pl_{k,\infty}^{re}$; $E_{k,1}^{\bar{S}}$ est donc égal ici au groupe des S_0-unités de k au sens ordinaire, congrues à 1 modul m.

Notons par ι_m^S le groupe de nombres suivant:

$$\iota_m^S = \left\{x \in k_m^{+S_\infty},\, (x) = \mathcal{Q}^p \mathcal{Q}_{S_0}\right\},$$

où $k_m^{+S_\infty} = \left\{x \in k^\times,\, x \equiv 1\ (m),\ x > 0 \text{ en dehors de } S_\infty\right\}$.

6.1. Lien entre ι_m^S et $cl_{k,m}^S[p]$, et entre ι_m^S et Λ_m^S

Rappelons que si $cl_{k,m}^S$ est le groupe des S-classes de k de rayon m, alors $cl_{k,m}^S[p]$ est celui de ces classes qui sont tuées par p; $E_{L,m}^S = L^\times \cap \mathcal{U}_{L,m}^S$ ($\mathcal{U}_{L,m}^S$ est défini sur le modèle de $\mathcal{U}_{K,m}^S$, cf. Paragraphe 3.3).

Proposition 6.1. ([M], Chapitres 3 et 4, Propositions 3.3.1, 4.4.1 et 4.4.2.)
a) *On a la suite exacte*

$$1 \longrightarrow \frac{E_{k,m}^S}{(E_{k,m}^S)^p N_{L/k} E_{L,m}^S} \longrightarrow H_2(G_T^S, \mathbb{F}_p) \longrightarrow cl_{k,m}^S[p] \longrightarrow 1 .$$

b) *On a la suite exacte*

$$1 \longrightarrow \frac{E_{k,m}^S}{(E_{k,m}^S)^p N_{L/k} E_{L,m}^S} \longrightarrow \frac{\iota_m^S}{(k_m^{+S_\infty})^p N_{L/k} E_{L,m}^S} \xrightarrow{\delta_m^S} cl_{k,m}^S[p] \longrightarrow 1 ,$$

où δ_m^S est défini comme suit: pour x de ι_m^S, $(x) = \mathcal{Q}^p \mathcal{Q}_{S_0}$, on pose

$$\delta_m^S(x) = cl_{k,m}^S(\mathcal{Q}) .$$

c) *On a l'isomorphisme suivant*

$$\frac{\Lambda_m^S}{k^{\times p} N_{L/k} E_{L,m}^S} \overset{d_m^S}{\simeq} \frac{\iota_m^S}{(k_m^{+S_\infty} \cap k^{\times p}) N_{L/k} E_{L,m}^S} .$$

6.2. Théorème principal

On peut maintenant énoncer le résultat principal.

Theorem 6.2. *Soient p un nombre premier, et k un corps de nombres.*
Soient T un ensemble fini de places finies de k, et S un ensemble fini de places de k ($S = S_0 \cup S_\infty$).
On pose $B(T,S) = T \cup pl_{k,\infty}^{re} \backslash S_\infty$, et $\hat{B}(T,S) = B(T,S)$, privé d'une place quelconque.
Notons L la p-extension maximale de k, T-ramifiée modérée, S-décomposée, et G_T^S le groupe $\mathrm{Gal}(L/k)$.
Supposons $p \neq 2$, ou bien $E_{k,m}^S = E_{k,m}^{\bar{S}}$, avec $\bar{S} = S \cup pl_{k,\infty}^{re}$, et supposons également L/k finie.
Alors, si

$$\ker\left(H^2(G_T^S, \mathbb{F}_p) \to \bigoplus_{v \in B(T,S)} H^2(\overline{G}_v, \mathbb{F}_p) \right) = H^2(G_T^S, \mathbb{F}_p) ,$$

on a

$$\frac{\Lambda_m^S}{k^{\times p} N_{L/k} E_{L,m}^S} \simeq \left(H^2(G_T^S, \mathbb{F}_p) \right)^* .$$

Si de plus k contient μ_p, alors on peut remplacer $B(T,S)$ par $\hat{B}(T,S)$.

Proof. Avec les points a et b de la Proposition 6.1, on a

$$|H_2(G_T^S,\mathbb{F}_p)| = \left|\frac{\iota_m^S}{(k_m^{+S_\infty})^p N_{L/k}E_{L,m}^S}\right| ;$$

avec le point c,

$$|H_2(G_T^S,\mathbb{F}_p)| \geq \left|\frac{\Lambda_m^S}{k^{\times p} N_{L/k}E_{L,m}^S}\right| . \tag{6.1}$$

Rappelons ensuite que par le Corollaire 4.9, on a la surjection

$$\frac{\Lambda_m^S}{k^{\times p}} \overset{\Omega_T^S}{\twoheadrightarrow} \left(\ker\left(H^2(G_T^S,\mathbb{F}_p) \to H^2(\overline{G}(p),\mathbb{F}_p)\right)\right)^* ; \tag{6.2}$$

de plus cette surjection est induite par le symbole généralisé défini comme suit (Théorèı 4.4)

$$\hat{\rho}_{\mathfrak{k}/k,T}^S : \frac{\mathcal{U}_{k,m}^S}{(\mathcal{U}_{k,m}^S \cap \mathcal{J}_k{}^p)} \longrightarrow \frac{H_T^S}{(H_T^S)^p[H_T^S,\overline{G}]} .$$

Ainsi, à x de Λ_m^S, on associe un idèle x' de $\mathcal{U}_{k,m}^S$ (Proposition 4.6), et on a

$$\Omega_T^S(x) = \hat{\rho}_{\mathfrak{k}/k,T}^S(x') ;$$

en particulier, pour x de $N_{L/k}E_{L,m}^S$, l'idèle associé peut être x lui-même, et ainsi paı le Corollaire 3.7

$$\Omega_T^S(N_{L/k}E_{L,m}^S) = \hat{\rho}_{\mathfrak{k}/k,T}^S(N_{L/k}E_{L,m}^S) = 1 .$$

On peut ainsi factoriser Ω_T^S par $N_{L/k}E_{L,m}^S$.

Par la Proposition 4.11, par hypothèse, avec (6.2), et en notant que $\left(H^2(G_T^S,\mathbb{F}_p)\right)^* =$ $H_2(G_T^S,\mathbb{F}_p)$, on a la surjection

$$\frac{\Lambda_m^S}{k^{\times p} N_{L/k}E_{L,m}^S} \twoheadrightarrow H_2(G_T^S,\mathbb{F}_p) ;$$

avec (6.1) on conclut alors facilement. [

Corollary 6.3. *Soient p un nombre premier, et k un corps de nombres contenan μ_p.*

On prend $S = pl_{k,\infty}^{re}$, et $T = \{v_0\}$, avec v_0 place quelconque de $pl_{k,0}$ (non au dessus de p). Notons par L la p-extension maximale de k, T-ramifiée et non complexifiée, et par G le groupe de Galois Gal(L/k). *Supposons L/k finie. Alors o a l'isomorphisme suivant:*

$$\frac{\Lambda_m^S}{k^{\times p} N_{L/k}E_{L,m}^{\mathrm{ord}}} \simeq H_2(G,\mathbb{F}_p) ,$$

où $\Lambda_m^S = \{x \in k^\times,\, (x) = \mathcal{Q}^p,\, x \in k_{v_0}^{\times\, p}\}$, *et où* $E_{L,m}^{\mathrm{ord}}$ *est le sous-groupe des unités de* L *au sens ordinaire, congrues à 1 modulo* $m = \prod_{w|v\in T} w$.

Corollary 6.4. *Soit* S_0 *un ensemble fini de places finies de* k, $S = S_0 \cup pl_{k,\infty}^{re}$; *supposons que la* p*-extension maximale* L *de* k, S_0*-décomposée et non-complexifiée, est finie;* $G = \mathrm{Gal}(L/k)$.

Alors on a l'isomorphisme suivant:

$$\frac{\Lambda^S}{k^{\times p} N_{L/k} E_L^S} \simeq H_2(G, \mathbb{F}_p),$$

où $\Lambda^S = \{x \in k^\times,\, (x) = \mathcal{Q}^p \mathcal{Q}_{S_0}\}$, *et où* E_L^S *est le groupe des* S_0*-unités de* L *au sens ordinaire.*

Lorsque S_0 *est vide,* L *est la* p*-extension maximale de* k, *non-ramifiée et non-complexifiée; on obtient alors l'existence d'un isomorphisme entre* $\frac{\Lambda}{k^{\times p} N_{L/k} E_L^{\mathrm{ord}}}$ *et* $H_2(G, \mathbb{F}_p)$, *où* E_L^{ord} *est le groupe des unités de* L *au sens ordinaire et où* $\Lambda = \{x \in k^\times,\, (x) = \mathcal{Q}^p\}$.

Références

[AT] ARTIN, E., et TATE, J.: Class Field Theory, W. A. Benjamin Inc., New York, 1968

[C] CASSELS, J.-W.-S.: Global Fields. Dans: J.-W.-S. CASSELS et A. FRÖHLICH, Algebraic Number Theory, Academic Press, London, 1967

[G] GRUENBERG, K.: Profinite Groups. Dans: J.-W.-S. CASSELS et A. FRÖHLICH, Algebraic Number Theory, Academic Press, London, 1967

[H] HABERLAND, K.: Galois Cohomology of Algebraic Number Fields, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978

[J] JAULENT, J.-F.: L'Arithmétique des l-Extensions, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Fascicule 1, 1986

[KL] KISILEVSKY, H., et LABUTE, J.: On a Condition for the p-Class Tower of a CM-Field to be Infinite, Théorie des Nombres (Québec, PQ, 1987), 556-560, de Gruyter, Berlin-New York, 1989

[K1] KOCH, H.: Galoissche Theorie der p-Erweiterungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1970

[K2] KOCH, H.: Number Theory II, EMS 62, Springer-Verlag, Berlin, 1992

[M] MAIRE, C.: Extensions T-Ramifiées Modérées, S-Décomposées, Thèse, Faculté des Sciences de Besançon, 1995

[Sa] SAFAREVIC, I.-R.: Extensions with Prescribed Ramification Points, Publ. Math. IHES **18** (1964), 71-95 (Russe)

[Se1] SERRE, J.-P.: Local Class Field Theory. Dans: J.-W.-S. CASSELS et A. FRÖHLICH, Algebraic Number Theory, Academic Press, London, 1967

[Se2] SERRE, J.-P.: Corps Locaux, Hermann, Paris, 1968

[Se3] SERRE, J.-P.: Cohomologie Galoisienne, Springer-Verlag, 1994

Laboratoire de Mathématiques - URA 741 au CNRS
Université de Besançon
16, route de Gray
F - 25000 Besançon
e - mail:
maire@math.univ - fcomte.fr