Rappels – 9

Suites numériques

1. Suites usuelles

Arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$ (raison r) $\Rightarrow u_n = u_0 + nr$.
Géométrique : $u_{n+1} = q\,u_n$ (raison q) $\Rightarrow u_n = u_0\,q^n$.

Sommes usuelles

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ (q \neq 1).$$

2. Suites arithmético-géométriques

$u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$. On cherche le point fixe $\ell = a\ell + b$, i.e. $\ell = \dfrac{b}{1-a}$, puis on pose $v_n = u_n - \ell$: (v_n) est géométrique de raison a, donc $v_n = v_0 a^n$ et $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$.

3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Pour $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$, on résout l'équation caractéristique $x^2 = \alpha x + \beta$.

— Deux racines distinctes $r_1 \neq r_2$: $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$.
— Racine double r : $u_n = (A + Bn)r^n$.

Les constantes A, B se déterminent avec u_0 et u_1.

4. Monotonie

(u_n) est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n (décroissante si $\leq$). On étudie souvent le signe de $u_{n+1} - u_n$, ou (si $u_n > 0$) on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Pour une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, la monotonie peut aussi s'obtenir par récurrence.

5. Suites bornées

(u_n) est majorée s'il existe M tel que $u_n \leq M$ pour tout n ; minorée s'il existe m tel que $u_n \geq m$; bornée si majorée et minorée (i.e. $|u_n| \leq K$).

6. Limites et convergence

Formes indéterminées : pour un quotient de polynômes en n, on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Théorème des gendarmes : si $a_n \leq u_n \leq b_n$ et $a_n, b_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.

Théorème de la limite monotone : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge. (Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.)

Point fixe : si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et $u_n \to \ell$, alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.