

Rappels – 8

Logarithme, exponentielle

1. Fonction logarithme népérien $\ln$

$\ln$ est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, strictement croissante, avec $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Propriétés algébriques (pour $a, b > 0$, $n \in \mathbb{Z}$) :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b, \quad \ln(a^n) = n \ln a, \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

Dérivée : si u est dérivable et $u > 0$ sur un intervalle I ,

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad \text{sur } I$$

En particulier $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Domaine de dérivabilité d'une composée $\ln u$: il faut $u(x) > 0$ (domaine de définition), puis u dérivable en ces points.

2. Fonction exponentielle $\exp$

$\exp = \ln^{-1}$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, strictement croissante, $\exp(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Propriétés algébriques (pour $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$) :

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad (e^a)^n = e^{na}, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

Dérivée : si u est dérivable sur I ,

$$(e^u)' = u' e^u \quad \text{sur } I$$

En particulier $(e^x)' = e^x$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $\exp$ est dérivable (donc définie) partout où u est dérivable : *pas de condition de signe*.

Croissances comparées (utiles pour $f(x) = x^2 e^{-x}$, $f(x) = x \ln |x|$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

3. Dérivées usuelles (rappel, cas composés)

$$\begin{aligned} (u^n)' &= n u' u^{n-1} & (\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0) \\ (uv)' &= u'v + uv' & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0) \end{aligned}$$

Pour une fonction du type $x \mapsto x \ln x$ ou $(\sin x)e^{\cos x}$: on combine dérivée d'un produit et dérivée de $\ln u$ / e^u .

4. Résoudre une équation ou inéquation avec $\ln$ ou $\exp$

Domaine. Pour $\ln(\cdot)$: poser que chaque argument est > 0 (résoudre le système des conditions). Pour $\exp$: aucune condition.

Égalité de logarithmes / exponentielles. Sur le domaine :

$$\ln A = \ln B \iff A = B \qquad e^A = e^B \iff A = B$$

On ramène tout à un seul $\ln$ ou un seul $\exp$ de chaque côté (en utilisant les propriétés algébriques : $\ln A + \ln B = \ln(AB)$, un réel $k = \ln(e^k)$, etc.)

Inégalités. Comme $\ln$ et $\exp$ sont *strictement croissantes* :

$$\ln A \leq \ln B \iff A \leq B \text{ (sous conditions } A > 0, B > 0) \qquad e^A \leq e^B \iff A \leq B$$

Pour a^x avec $0 < a < 1$ (ex. $0.2^x \leq 7$) : $a^x = e^{x \ln a}$ et $\ln a < 0$, donc **la fonction est décroissante** et l'inégalité s'inverse quand on divise par $\ln a$.

Type “polynôme en $\ln x$ ” ou “polynôme en e^x ” : On pose $t = \ln x$ (ou $t = e^x$, avec $t > 0$), on résout en t , puis on revient à x .