

Rappels – 6

Limites, continuité, TVI, dérivation et étude de fonctions

1. Limites, formes indéterminées

Une limite en un point ou en $\pm\infty$ se calcule directement si aucune opération n'est *indéterminée* ; les formes à traiter sont $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$.

— **Fractions rationnelles en $\pm\infty$** : on factorise numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré ; la limite est celle du quotient des termes dominants.

— **Différence de racines $\sqrt{A} - \sqrt{B}$** (forme $0/0$ ou $\infty - \infty$) : on multiplie et divise par la *quantité conjuguée* $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, ce qui donne $\frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$, sans racines au numérateur.

Ex.
$$\frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sqrt{2}.$$

— **Polynôme en un point** : substitution directe (fonction continue).

2. Continuité

f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (la limite existe, est finie, et vaut $f(a)$). Sommes, produits, quotients (dénominateur non nul), racines (argument ≥ 0) et composées de fonctions continues sont continues sur leur domaine.

Fonction définie par morceaux. Au point de jonction x_0 , on compare la limite à gauche, la limite à droite et la valeur en x_0 : continuité $\iff$ les trois coïncident (cela fixe souvent un paramètre).

Prolongement par continuité. Si $x_0 \notin D_f$ mais $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ existe et est finie, on pose $\tilde{f}(x_0) = \ell$: $\tilde{f}$ est alors continue en x_0 . Si la limite est infinie ou n'existe pas, aucun prolongement n'est possible.

3. TVI, bijection, dichotomie

Théorème des valeurs intermédiaires. Si f est continue sur $[a, b]$, elle prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Corollaire (existence et unicité). Si de plus f est *strictement monotone* sur $[a, b]$, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur l'intervalle $f([a, b])$: pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une **unique** solution.

Valeur approchée (dichotomie). Une fois l'existence/unicité de α acquise sur $[a, b]$ (avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés), on calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on garde la moitié où f change de signe, et on répète jusqu'à obtenir un encadrement de largeur $\leq 10^{-m}$ si 10^{-m} est la précision souhaitée.

4. Image d'un intervalle

Si f est continue et **strictement monotone** sur I , $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les images (ou limites) des bornes de I :

- f croissante : borne inf $\rightarrow$ borne inf, borne sup $\rightarrow$ borne sup (ouverture/fermeture conservée : bornes atteintes $\rightarrow$ intervalle fermé de ce côté, limites en une borne exclue $\rightarrow$ ouvert) ;
- f décroissante : les bornes s'échangent.

5. Dérivation

Dérivées usuelles : $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\sin x)' = \cos x$;
 $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Règles de calcul : $(u + v)' = u' + v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; composée $(v \circ u)'(x) = u'(x) v'(u(x))$, en particulier $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Tangente. En $x = a$: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Deux droites sont *parallèles* si leurs pentes sont égales ($f'(a) = m$), *perpendiculaires* si le produit des pentes vaut -1 ($f'(a) \cdot m = -1$).

6. Asymptotes

Asymptote horizontale en $\pm\infty$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$ (finie) $\Rightarrow$ droite $y = \ell$.

Asymptote verticale en $x_0 \notin D_f$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ droite $x = x_0$.

Asymptote oblique $y = ax + b$ en $\pm\infty$: on pose $g(x) = f(x) - (ax + b)$ (souvent obtenu par division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour une fraction rationnelle) et on montre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$; le signe de $g(x)$ donne la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote (au-dessus si $g > 0$, en dessous si $g < 0$).

7. Étude complète d'une fonction

1. **Domaine de définition** (et de dérivabilité s'il diffère).
2. **Variations.** Le signe de f' donne le sens de variation ($f' > 0$: croissante, $f' < 0$: décroissante); un changement de signe de f' en un point où f' s'annule signale un extremum local.
3. **Limites** aux bornes du domaine (utiliser croissances comparées si besoin).
4. **Dérivée** f' , mise sous forme factorisée, étude du signe de f' .
5. **Tableau de variations** (croissance/décroissance, extrema).
6. **Tracé de la courbe** : asymptotes éventuelles, tangentes remarquables, quelques valeurs, symétries (parité pour $x \ln |x|$).
7. **Équation** $f(x) = k$ **avec paramètre.** Une fois le tableau de variation de f dressé (extrema locaux m et M , limites aux bornes), le nombre de solutions de $f(x) = k$ s'obtient en comptant les intersections de la droite horizontale $y = k$ avec $\mathcal{C}_f$ sur chaque intervalle de monotonie (application du corollaire du TVI, section 3).