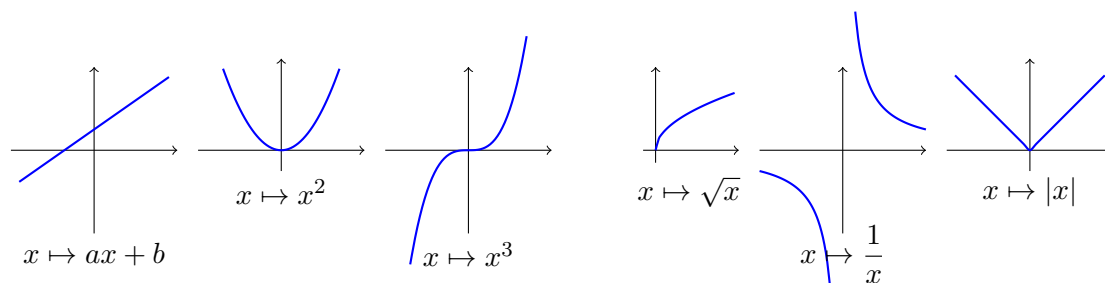


Rappels – 5

Fonctions de référence, équations à paramètre, domaine de définition

1. Fonctions de référence

Toute fonction s'obtient en général par transformation d'une fonction **de référence**. Les principales sont :



Transformations élémentaires (à partir d'un graphe connu $\mathcal{C}_f$) :

- $x \mapsto f(x) + k$: translation verticale de vecteur $(0, k)$;
- $x \mapsto f(x - h)$: translation horizontale de vecteur $(h, 0)$;
- $x \mapsto -f(x)$: symétrie par rapport à (Ox) ; $x \mapsto f(-x)$: symétrie par rapport à (Oy) ;
- $x \mapsto |f(x)|$: on garde $\mathcal{C}_f$ où $f \geq 0$, on réfléchit vers le haut la partie où $f < 0$.

Droite générique (fonction affine). $f(x) = ax + b$ a pour graphe une droite de pente (coefficient directeur) a et d'ordonnée à l'origine b ; a donne le sens de variation (croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$, constante si $a = 0$), et la droite passe par $(0, b)$ et $(-\frac{b}{a}, 0)$ si $a \neq 0$.

Trinôme du second degré. Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, on met sous forme canonique $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$: c'est le graphe de $x \mapsto ax^2$ translaté de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Sommes de valeurs absolues

Pour tracer $x \mapsto b_1|x - a_1| + b_2|x - a_2| + \dots$:

- 1) repérer les valeurs a_i qui annulent chaque terme (“points de cassure– valeurs spéciales”) et les classer par ordre croissant ;
- 2) sur chaque intervalle entre deux points consécutifs (et aux extrémités), le signe de chaque $x - a_i$ est constant : on peut donc enlever chaque valeur absolue en la remplaçant par $+(x - a_i)$ ou $-(x - a_i)$ selon le signe ;
- 3) la fonction obtenue sur chaque intervalle est **affine** : on trace un segment de droite sur chaque intervalle, et on obtient une courbe **affine par morceaux**.

2. Équations avec paramètre : méthode graphique et algébrique

Méthode graphique. Une équation $g_a(x) = h_a(x)$ se lit comme l'intersection de deux courbes ; quand a varie, une des courbes (ou les deux) se déplace, et l'on observe l'apparition, la disparition ou le déplacement des points d'intersection. On classe ensuite les valeurs de a selon le nombre de solutions observées.

Méthode algébrique. On revient à l'équation et on discute selon a :

- *Linéaire en x* : $ax + 1 = x - 4 \iff (a - 1)x = -5$. Si $a \neq 1$, solution unique $x = \frac{-5}{a-1}$; si $a = 1$, pas de solution (équation $1 = -4$).
- *Quadratique* : $x - 1 = x^2 - a \iff x^2 - x + (1 - a) = 0$, discriminant $\Delta = 1 - 4(1 - a) = -3 + 4a$. Si $a < 3/4$: aucune solution réelle ; si $a = 3/4$: une solution double $x = 1/2$; si $a > 3/4$: deux solutions $x = \frac{1 \pm \sqrt{-3 + 4a}}{2}$.

- *Avec inverse ou racine* : on se ramène à une équation polynomiale en multipliant par x (en excluant $x = 0$) ou en élevant au carré (**en vérifiant a posteriori** le signe/domaine, car élever au carré peut introduire des solutions parasites).

Toujours conclure en confrontant les deux lectures : le nombre de solutions trouvé algébriquement doit correspondre aux intersections vues graphiquement, pour chaque valeur de a .

3. Domaine de définition

Le domaine de définition D_f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels tous les calculs de $f(x)$ sont licites. Les deux contraintes usuelles :

- **Quotient** $\frac{u(x)}{v(x)}$: il faut $v(x) \neq 0$ (on résout $v(x) = 0$ et on retire ces valeurs) ;
- **Racine carrée** $\sqrt{u(x)}$: il faut $u(x) \geq 0$ (étude de signe de u).

Méthode générale : lister toutes les conditions imposées par l'expression (une par dénominateur, une par racine), les résoudre séparément (souvent avec un tableau de signes), puis prendre l'**intersection** de toutes ces conditions.