

Rappels – 3

Polynômes du second degré : racines, discriminant, factorisation

1. Forme générale

Un polynôme du second degré s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On appelle **racines** les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$. Un polynôme du second degré a au plus deux racines.

2. Somme et produit des racines

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1, x_2 (c'est-à-dire si $\Delta \geq 0$, voir section 3), alors, **sans les calculer** :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple : pour $f(x) = x^2 - x - 3$, on a $a = 1, b = -1, c = -3$, donc $S = 1$ et $P = -3$.

3. Racine évidente

On teste d'abord des valeurs simples : $x = 0$ (si $c = 0$), $x = 1$ (si $a + b + c = 0$), $x = -1$ (si $a - b + c = 0$). Une fois une racine x_1 trouvée, on obtient x_2 **sans résoudre** grâce à S et P :

$$x_2 = \frac{c}{a x_1} \quad (\text{via } P) \quad \text{ou} \quad x_2 = -\frac{b}{a} - x_1 \quad (\text{via } S)$$

Exemple : $f(x) = 2x^2 - 3x$: $x_1 = 0$ est racine évidente ($c = 0$), et $S = \frac{3}{2}$ donne $x_2 = \frac{3}{2}$.

4. Résolution par le discriminant

Pour $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, on calcule le **discriminant** :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

— Si $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$: une racine **double** $x_0 = -\frac{b}{2a}$

— Si $\Delta < 0$: **aucune racine réelle**

5. Factorisation

Si $\Delta \geq 0$, on peut factoriser f à l'aide de ses racines :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(si $\Delta = 0$, cela donne $a(x - x_0)^2$). Si $\Delta < 0$ (ex. $x^2 + 1$), le polynôme **ne se factorise pas** en produit de facteurs du premier degré réels : il reste tel quel.

Méthode : calculer Δ , en déduire les racines si elles existent, puis écrire directement la forme factorisée.