

Rappels – 2

Équations : premier degré, fractions, carrés/racines, valeurs absolues

1. Équations du 1^{er} degré

On regroupe les termes en x d'un côté, les constantes de l'autre, en effectuant la **même opération des deux côtés** de l'égalité.

$$ax + b = cx + d \iff x = \frac{d-b}{a-c} \text{ (si } a \neq c)$$

Méthode : développer les parenthèses, réduire au même dénominateur si besoin, puis isoler x . Si $a = c$: **aucune solution** si $b \neq d$, ou **tout réel est solution** si $b = d$.

2. Équations avec fractions

Condition d'existence : un dénominateur ne doit jamais être nul ; on détermine d'abord les valeurs interdites de x , *avant* de résoudre. Pour $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ avec $B \neq 0$, $D \neq 0$, produit en croix :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$$

On résout, puis on **vérifie** que la solution n'est pas une valeur interdite.

3. Équations avec carrés et racines

Type $x^2 = a$: si $a > 0$, deux solutions $x = \pm\sqrt{a}$; si $a = 0$, une solution $x = 0$; si $a < 0$, aucune solution réelle. Même principe pour $(x+k)^2 = a$.

Type $A^2 = B^2$: on ramène à un produit nul :

$$A^2 = B^2 \iff (A-B)(A+B) = 0 \iff A = B \text{ ou } A = -B$$

(ne jamais simplifier $A^2 = B^2$ en $A = B$, on perdrait la solution $A = -B$).

Type $\sqrt{A} = B$: il faut $A \geq 0$ (domaine) et $B \geq 0$; alors

$$\sqrt{A} = B \iff \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

En vrac

Équation avec une racine. Isoler la racine d'abord : ex. $\sqrt{x} - 5 = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 6$, puis on applique la règle ci-dessus.

Équation avec produit de racines : $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ pour $a, b \geq 0$; ex. $\sqrt{x}\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x(x^2+1)}$ (avec la condition $x \geq 0$ pour que les deux racines existent), ce qui ramène à la forme $\sqrt{A} = B$.

Important : on **vérifie systématiquement** chaque solution dans l'équation de départ, car élever au carré peut introduire des solutions étrangères.

4. Équations avec valeur absolue

La **valeur absolue** $|x|$ du nombre x est le nombre positif vérifiant $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Pour $b \geq 0$:

$$|A| = b \iff A = b \text{ ou } A = -b$$

Si $b < 0$, l'équation $|A| = b$ n'a **aucune solution** (une valeur absolue est toujours ≥ 0).

Pour deux expressions A et B :

$$|A| = |B| \iff A = B \text{ ou } A = -B$$