

Rappels – 1

Fractions, puissances, racines carrées, identités remarquables

1. Priorité des opérations

Pour calculer une expression, on effectue les opérations dans cet ordre (et non dans l'ordre où elles sont écrites) :

- 1) ce qui est entre parenthèses (du plus intérieur au plus extérieur) ;
- 2) puissances et racines ;
- 3) multiplications et divisions, de gauche à droite ;
- 4) additions et soustractions, de gauche à droite.

Exemple : $2 + 3 \times (1 + 4)^2 = 2 + 3 \times 5^2 = 2 + 3 \times 25 = 2 + 75 = 77$.

- (1) on calcule $1 + 4 = 5$ dans la parenthèse ;
- (2) puis $5^2 = 25$;
- (3) puis $3 \times 25 = 75$;
- (4) enfin $2 + 75 = 77$.

2. Fractions

Pour commencer : $a = \frac{a}{1}$, $0 = \frac{0}{b}$ où b est non nul.

Pour additionner/soustraire des fractions, on les réduit au même dénominateur :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Pour multiplier : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Pour diviser, on multiplie par l'inverse : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Fractions étagées ("en escalier") : attention à la position du signe égal.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b} ; \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

Méthode : Ne pas hésiter à calculer d'abord numérateur et dénominateur séparément, puis diviser le résultat obtenu.

3. Puissances

Pour $a \neq 0$ et $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1$$

But : tout ramener à une seule puissance a^n d'un même nombre a , en décomposant chaque entier en facteurs premiers : $9 = 3^2$, $81 = 3^4$, $4 = 2^2$, etc. Exemple : $7^3 \cdot (49)^3 \cdot 7^4$ se lit $7^3 \cdot (7^2)^3 \cdot 7^4 = 7^{3+6+4} = 7^{13}$.

4. Notation décimale

Un nombre s'écrit $a \times 10^n$; multiplier par 10^n revient à décaler la virgule de n rangs (à droite si $n > 0$, à gauche si $n < 0$).

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p}, \quad \frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$$

Pour additionner deux termes en 10^n , il faut d'abord les mettre à la **même puissance de 10**, puis additionner les coefficients.

5. Racines carrées

À savoir : $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ($a, b \geq 0$), $\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$.

Simplifier une racine : factoriser sous la racine par le plus grand carré parfait possible. On teste les carrés parfaits 4, 9, 16, 25, 36, ... comme diviseurs du nombre sous la racine. Exemple : $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$.

On ne peut additionner/soustraire que des racines **identiques** ("termes semblables") :

$$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$$

Rationaliser un dénominateur (le rendre entier) : on multiplie numérateur et dénominateur par la **quantité conjuguée** du dénominateur. Le conjugué de $a + \sqrt{c}$ est $a - \sqrt{c}$, et :

$$(a + \sqrt{c})(a - \sqrt{c}) = a^2 - c$$
$$\frac{1}{a + \sqrt{c}} = \frac{a - \sqrt{c}}{(a + \sqrt{c})(a - \sqrt{c})} = \frac{a - \sqrt{c}}{a^2 - c}$$

6. Identités remarquables

(i) *Puissances*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Pour les puissances supérieures, on utilise le **triangle de Pascal** (coefficients binomiaux) :

$n = 0 :$						1
$n = 1 :$					1	1
$n = 2 :$				1	2	1
$n = 3 :$			1	3	3	1
$n = 4 :$	1		4	6	4	1
$n = 5 :$	1	5	10	10	5	1

chaque coefficient est la somme des deux coefficients au-dessus de lui. On a alors, avec $\binom{n}{k}$ le coefficient de la ligne n :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

et les signes alternent $(+, -, +, -, \dots)$ pour $(a - b)^n$.

(ii) *Différences entre puissances*

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$$