

Feuille 6

Exercice 1. Calculer les limites suivantes

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 - 3x + 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 3x + 2}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 3}}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

Exercice 2. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes, puis étudier leur continuité.

$$(i) f(x) = x^2 - 2x - 1/(x^2 + 1), \quad g(x) = x^3 + 1/x.$$

$$(ii) h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{pour } x \geq 1 \\ x - 4 & \text{pour } x < 1 \end{cases}, \quad k(x) = \begin{cases} x + 1/x & \text{pour } x \geq -1 \\ x - 1 & \text{pour } x < -1 \end{cases}.$$

Exercice 3. Donner le domaine de définition puis de continuité des fonctions suivantes. Est-ce qu'elles peuvent être prolongées par continuité en $x = 0$?

$$(i) f(x) = \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - x}}{x}.$$

$$(ii) g(x) = \frac{2x}{\sqrt{2 + 2x} - \sqrt{2 - x}}.$$

Exercice 4. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + ax^n} - \sqrt{1 - x^n}}{3x^4} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

où $n \geq 1$. Pour quelles valeurs de a et n , la fonction f est-elle continue en $x = 0$?

Exercice 5. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + a^2x^n} - \sqrt{1 - x^n}}{\sqrt{1 + x^n} - \sqrt{1 - ax^n}} & \text{pour } x \neq 0 \\ 2 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

où $a \neq -1$ et $n \geq 1$. Pour quelles valeurs de a et n , la fonction f est-elle continue en $x = 0$?

Exercice 6. Pour les fonctions f suivantes et les intervalles I , déterminer $f(I)$.

- (i) $f(x) = x + 2$ et $I = [-2, 1[$; $g(x) = -x - 1$ et $I = [-1, 2[$; $h(x) = 2x - 1$ et $I = [-1, 1]$.
- (ii) $f(x) = x^2 + 1$ et $I = \mathbb{R}$; $h(x) = -x^2$ et $I = [-1, 1]$.
- (iii) $f(x) = 1/x$ et $I = [1, 2[$; $h(x) = 1/\sqrt{x}$, et $I = [0, 4[$; $(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, et $I = \mathbb{R}$.

Exercice 7. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- (i) $x \mapsto x$, $x \mapsto 3x - 1$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto -x^2 + 3x + 4$, $x \mapsto x^5 - 5x^4 + 6x^2$.
- (ii) $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{3x - 2}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + \sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{-2x^2 - x + 2}$, $x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x}}$.
- (iii) $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$, $x \mapsto \sin(x^2 + x)$.
- (iv) $x \mapsto x\sqrt{x}$, $x \mapsto x \sin x$, $x \mapsto (\sin x)(\cos x)$.
- (v) $x \mapsto \frac{x^3 - x + 2}{x^5 - 1}$, $x \mapsto \frac{x^4 + x}{x^2 + 2}$, $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{x}{\cos x}$, $x \mapsto \tan x$.

Exercice 8. Soient la fonction $f(x) = x^2 + x - 4$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

- (i) Représenter $\mathcal{C}_f$.
- (ii) Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$, en $x = 1$ et en $x = -1$.
- (iii) Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite $y = x$.
- (iv) Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est perpendiculaire à la droite $y = x$.

Exercice 9. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2$.

- (i) Calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f .
- (ii) Représenter la courbe $\mathcal{C}_f$ de f .
- (iii) Suivant le paramètre réel k , déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$x^3 - 3x^2 - k = 0.$$

Exercice 10. Montrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique solution réelle α . Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 11. Montrer que l'équation $x^5 + x^3 + 1 = 0$ admet une unique solution réelle α . Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 12. Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes (on précisera les limites en l'infini et les éventuelles asymptotes horizontales et verticales)

(i) $x \mapsto \frac{x-1}{x+2};$

(ii) $x \mapsto \frac{x^2-1}{3x-4};$

(iii) $x \mapsto \frac{x+1}{x^2-4};$

(iv) $x \mapsto \sqrt{x^2+1};$

(v) $x \mapsto (x-1)\sqrt{x^2+1};$

(vi) $x \mapsto (x-1)\sqrt{x^2-1};$

Exercice 13. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$.

- (i) Dresser le tableau de variation de f .
- (ii) Soit la fonction $g(x) = f(x) - 2x - 1$. Etudier la fonction g .
- (iii) En déduire que la fonction f admet une asymptote oblique en l'infini.
- (iv) Représenter la courbe $\mathcal{C}_f$ de f .

Exercice 14. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + x - 1}{x + 1}$.

- (i) Dresser le tableau de variation de f .
- (ii) Soit la fonction $g(x) = f(x) - x^2 + x - 2$. Etudier la fonction g .
- (iii) En déduire le comportement de f en l'infini.
- (iv) Représenter la courbe $\mathcal{C}_f$ de f .