Rappels – Feuille 11

Primitives, intégrales

1. Primitives

F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et $F' = f$. Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante : l'ensemble des primitives est $\{F + c,\ c \in \mathbb{R}\}$.

Primitives usuelles (à une constante près, sur un intervalle où l'expression a un sens)

$$x^n \rightsquigarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1) \qquad \sin x \rightsquigarrow -\cos x$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}} \rightsquigarrow 2\sqrt{x} \qquad 1 + \tan^2 x = \tfrac{1}{\cos^2 x} \rightsquigarrow \tan x$$
$$\frac{1}{x} \rightsquigarrow \ln|x| \qquad u'e^u \rightsquigarrow e^u$$
$$e^x \rightsquigarrow e^x \qquad \frac{u'}{u} \rightsquigarrow \ln|u|$$
$$\cos x \rightsquigarrow \sin x \qquad u'u^n \rightsquigarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1)$$

Ces dernières formules ($u'e^u$, u'/u, $u'u^n$) s'obtiennent en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée : si u est dérivable, $(e^u)' = u'e^u$, $(\ln|u|)' = u'/u$, $\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)' = u'u^n$.

2. Décomposition en éléments simples

Pour intégrer une fraction rationnelle, on la décompose en somme de termes plus simples avant de primitiver terme à terme. Exemple : pour $f(x) = \dfrac{1}{(x+a)(x+b)}$, on cherche α, β tels que

$$f(x) = \frac{\alpha}{x+a} + \frac{\beta}{x+b},$$

en réduisant au même dénominateur et en identifiant les numérateurs.

3. Intégrale définie

Si f est continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Linéarité : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$. Relation de Chasles : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

4. Intégration par parties

Pour u, v dérivables à dérivées continues sur $[a,b]$:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Utile pour intégrer un produit dont un facteur se simplifie par dérivation (ex. $x\,e^x$, $x\cos x$, $\ln x$, $e^x \cos x$ — dans ce dernier cas on applique la formule deux fois puis on résout l'équation obtenue).

5. Aire entre deux courbes

Si $f \geq g$ sur $[a, b]$, l'aire du domaine délimité par C_f, C_g, $x = a$ et $x = b$ vaut

$$\mathcal{A} = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \quad \text{(en unités d'aire).}$$

Cas particulier $g = 0$: l'aire sous C_f (si $f \geq 0$) entre $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b f(x)\, dx$.

6. Intégrale impropre (aperçu)

Pour étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$, on calcule $\displaystyle\int_0^{n} f(x)\, dx$ pour n fixé, puis on fait tendre $n \to +\infty$; si cette limite existe et est finie, on dit que l'intégrale converge et vaut cette limite.