Rappels – 10

Géométrie

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Vecteurs et produit scalaire

Pour $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\, y_B - y_A)$, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Pour $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$, où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- $\vec{u}, \vec{v}$ **orthogonaux** $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u}, \vec{v}$ **colinéaires** $\iff xy' - x'y = 0$.
- Identité de polarisation : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\big)$, d'où pour un triangle ABC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \cdot AC \cos(\hat{A})$ (Al-Kashi).

2. Droites

Une droite $\mathcal{D}$ admet une équation cartésienne $ax + by + c = 0$; le vecteur $\vec{n} = (a, b)$ est **normal** à $\mathcal{D}$, et $\vec{u} = (-b, a)$ est un vecteur **directeur**.

Équation paramétrique passant par $A(x_A, y_A)$ de direction $\vec{u} = (\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Distance d'un point à une droite $ax + by + c = 0$:

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$: point $H \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ (ou $\overrightarrow{AH}$ colinéaire à $\vec{n}$) ; c'est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de A.

Médiatrice de $[AB]$: ensemble des points M tels que $MA = MB$; c'est la droite passant par le milieu de $[AB]$ et orthogonale à $\overrightarrow{AB}$.

3. Cercles

Équation cartésienne : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, qui se met sous forme canonique

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \qquad r^2 = a^2 + b^2 - c,$$

de centre $\Omega(a, b)$ et rayon r (si $a^2 + b^2 - c > 0$).

Cercle circonscrit à ABC : son centre Ω vérifie $\Omega A = \Omega B = \Omega C$; il est à l'intersection des médiatrices des côtés.

Intersection droite/cercle : on substitue l'équation de la droite dans celle du cercle.

Tangente au cercle en un point P de celui-ci : droite passant par P, orthogonale au rayon $\overrightarrow{\Omega P}$ (donc $\overrightarrow{\Omega P}$ est vecteur normal).

4. Parallélogrammes et homothéties

$ABCD$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu, qui est le centre de symétrie de la figure.

Homothétie de centre O et de rapport k : $M \mapsto M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$. Elle multiplie les longueurs par $|k|$ et conserve les angles, l'alignement et le parallélisme.