Licence Sciences fondamentales et Applications 1ère année - 2025/26

Parcours aménagé

Feuille 6

Exercice 1. Calculer les limites suivantes

(i) $\lim_{x\to 0} 2x^2 - 3x + 2$, $\quad \lim_{x\to 1} \dfrac{3x^3 - 3x + 2}{x}$, $\quad \lim_{x\to -1} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$, $\quad \lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2-1}}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{x}$, $\quad \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, $\quad \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x}$.

Exercice 2. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes, puis étudier leur continuité.

(i) $f(x) = x^2 - 2x - 1/(x^2+1)$, $\; g(x) = x^3 + 1/x$.

(ii) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{pour } x \geq 1 \\ x - 4 & \text{pour } x < 1 \end{cases}$, $\quad k(x) = \begin{cases} x + 1/x & \text{pour } x \geq -1 \\ x - 1 & \text{pour } x < -1 \end{cases}$.

Exercice 3. Donner le domaine de définition puis de continuté des fonctions suivantes. Est-ce qu'elles peuvent être prolongées par continuité en $x = 0$?

(i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

(ii) $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{2+2x} - \sqrt{2-x}}$.

Exercice 4. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+ax^n} - \sqrt{1-x^n}}{3x^4} & \text{pour } x \neq 0 \\[2ex] 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

où $a \neq 0$ et $n \geq 1$. Pour quelles valeurs de a et n, la fonction f est-elle continue en $x = 0$?

Exercice 5. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+a^2x^n} - \sqrt{1-x^n}}{\sqrt{1+x^n} - \sqrt{1-ax^n}} & \text{pour } x \neq 0 \\[2ex] 2 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

où $a \neq -1$ et $n \geq 1$. Pour quelles valeurs de a et n, la fonction f est-elle continue en $x = 0$?

Exercice 6. Pour les fonctions f suivantes et les intervalles I, déterminer $f(I)$.

(i) $f(x) = x + 2$ et $I = [-2, 1[$; $g(x) = -x - 1$ et $I = [-1, 2[$; $h(x) = 2x - 1$ et $I = [-1, 1]$.

(ii) $f(x) = x^2 + 1$ et $I = \mathbb{R}$; $h(x) = -x^2$ et $I = [-1, 1]$.

(iii) $f(x) = 1/x$ et $I = [1, 2[$; $h(x) = 1/\sqrt{x}$, et $I = [0, 4[$; $(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, et $I = \mathbb{R}$.

Exercice 7. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(i) $x \mapsto x$, $x \mapsto 3x - 1$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto -x^2 + 3x + 4$, $x \mapsto x^5 - 5x^4 + 6x^2$.

(ii) $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{3x-2}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + \sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{-2x^2 - x + 2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x + \sqrt{x}}$.

(iii) $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$, $x \mapsto \sin(x^2 + x)$.

(iv) $x \mapsto x\sqrt{x}$, $x \mapsto x \sin x$, $x \mapsto (\sin x)(\cos x)$.

(v) $x \mapsto \dfrac{x^3 - x + 2}{x^5 - 1}$, $x \mapsto \dfrac{x^4 + x}{x^2 + 2}$, $x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{x}{\cos x}$, $x \mapsto \tan x$.

Exercice 8. Soient la fonction $f(x) = x^2 + x - 4$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

(i) Représenter $\mathcal{C}_f$.

(ii) Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$, en $x = 1$ et en $x = -1$.

(iii) Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite $y = x$.

(iv) Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est perpendiculaire à la droite $y = x$

Exercice 9. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2$.

(i) Calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f.

(ii) Représenter la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

(iii) Suivant le paramètre réel k, déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$x^3 - 3x^2 - k = 0.$$

Exercice 10. Montrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique solution réelle α. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 11. Montrer que l'équation $x^5 + x^3 + 1 = 0$ admet une unique solution réelle α. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 12. Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes (on précisera les limites en l'infini et les éventuelles asymptotes horizontales et verticales)

(i) $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+2}$;

(ii) $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{3x-4}$;

(iii) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-4}$;

(iv) $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$;

(v) $x \mapsto (x-1)\sqrt{x^2+1}$;

(vi) $x \mapsto (x-1)\sqrt{x^2-1}$;

Exercice 13. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x-1}$.

(i) Dresser le tableau de variation de f.

(ii) Soit la fonction $g(x) = f(x) - 2x - 1$. Etudier la fonction g.

(iii) En déduire que la fonction f admet une asymptote oblique en l'infini.

(iv) Représenter la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

Exercice 14. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 1}{x+1}$.

(i) Dresser le tableau de variation de f.

(ii) Soit la fonction $g(x) = f(x) - x^2 + x - 2$. Etudier la fonction g.

(iii) En déduire le comportement de f en l'infini.

(iv) Représenter la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.