Licence Sciences fondamentales et Applications 1ère année - 2025/26

Parcours aménagé

Feuille 11

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes (on précisera les domaines de définition) :

(i) $x \mapsto -1,\ \ x \mapsto x^2,\ \ x \mapsto 3x-2,\ \ x \mapsto 2x^5-3x^4+5,\ \ x \mapsto (x-1)^2(x+1)$.

(ii) $x \mapsto -\dfrac{1}{x},\ \ x \mapsto \dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3},\ \ x \mapsto \sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

(iii) $x \mapsto 2e^x$, $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto e^{2x}-e^{3x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$, $x \mapsto \dfrac{3}{x+1}$.

(iv) $x \mapsto xe^{x^2}$, $x \mapsto x^2e^{x^3-1}$, $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$, $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$, $x \mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

(v) $x \mapsto \cos(2x)+3\sin x,\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{2+\cos x},\ x \mapsto x\cos x^2,\ x \mapsto \cos x\sin^2 x,\ x \mapsto \dfrac{\sin(\ln x)}{x}$, $x \mapsto \tan x$.

Exercice 2. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$.

(i) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}$.

(ii) En déduire une primitive de f sur $]1,+\infty[$.

Exercice 3. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$.

(i) Montrer qu'il existe trois nombres réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}$.

(ii) En déduire une primitive de f sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes

(i) $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1)dx$, $\int_{-1}^1 (e^{2x} - e^{-x})dx$.

(ii) $\int_0^1 \frac{-2x}{3x^2 + \sqrt{2}}$, $\int_e^2 \frac{1}{x \ln(x^2)} dx$, $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$.

(iii) $\int_0^1 \frac{x-2}{(x+2)^2} dx$ (indication : écrire $\frac{x-2}{(x+2)^2}$ sous la forme $\frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{x+2}$).

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes

(i) $\int_0^1 (xe^x)dx$, $\int_0^1 (x^2 e^x)dx$.

(ii) $\int_1^2 (\ln x)dx$, $\int_1^2 (x \ln x)dx$.

(iii) $\int_0^{\pi/2} (x \cos x)dx$, $\int_0^{\pi/2} (x \sin x)dx$.

(iv) $\int_0^{\pi/2} (e^x \cos x)dx$, $\int_0^{\pi/2} (e^{-x} \sin x)dx$.

Exercice 6. Soit la fonction $f(x) = x^2 + 1$.

(i) Représenter la courbe C_f d'équation $y = f(x)$.

(ii) Déterminer l'air de l'ensemble D des points du plan délimité par la courbe C_f et les droites $y = 0$, $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice 7. Soient les paraboles d'équations $y = \frac{x^2}{4} - 4$ et $y = -\frac{x^2}{4} + x + 8$.

(i) Représenter ces paraboles.

(ii) Déterminer les points d'intersection de ces paraboles.

(iii) Déterminer l'aire de l'ensemble des points du plan D délimité par ces deux paraboles.

Exercice 8. Soit la fonction $f(x) = e^{-x}$.

(i) Représenter la courbe C_f d'équation $y = f(x)$.

(ii) On se fixe un entier $n \geq 1$. Déterminé l'air de l'ensemble D_n des points du plan délimié par la courbe C_f et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = n$.

(iii) Que se passe t'il quand n tend vers l'infini ?