

Feuille 10

Pour l'ensemble de ces exercices, on considère un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1. On considère les points $A(1, 2)$, $B(4, 5)$, $C(6, 3)$, et $D(2, 0)$.

- (i) Calculer les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , et \overrightarrow{AC} .
- (ii) Montrer que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ne sont pas colinéaires.
- (iii) Vérifier si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux.
- (iv) Déterminer une condition sur un point $E(x, y)$ pour que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Exercice 2.

- (i) Montrer l'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.
- (ii) Soit un triangle ABC . En déduire la formule

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\hat{A}),$$

où \hat{A} est l'angle en A .

- (iii) Soient les points $A(0, 0)$, $B(1, 2)$ et $C(1, 3)$. Déterminer les trois angles du triangle ABC .

Exercice 3.

Soient les points $A(1, 2)$, $B(3, 6)$, et $C(4, -1)$.

- (i) Calculer les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
- (ii) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- (iii) Déterminer la norme des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
- (iv) En déduire l'angle θ entre \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

Exercice 4. Soient les points $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$, et la droite \mathcal{D} d'équation $x - 2y + 3 = 0$.

- (i) Calculer la distance entre les points A et B .
- (ii) Donner un vecteur directeur et un vecteur normal à la droite \mathcal{D} .
- (iii) Trouver les coordonnées du projeté orthogonal de A sur la droite \mathcal{D} .
- (iv) Déterminer les coordonnées du point C sur \mathcal{D} tel que AC soit minimal.

Exercice 5. Soient les points $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$, et $C(1, 5)$ et soit \mathcal{C} le cercle circonscrit au triangle ABC .

- (i) Montrer que le centre du cercle \mathcal{C} est équidistant des trois sommets du triangle.
- (ii) Calculer l'équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
- (iii) Calculer les coordonnées du centre de \mathcal{C} et son rayon.
- (iv) Donner une équation de \mathcal{C} .

Exercice 6. On donne :

- la droite $\mathcal{D} : y = 2x - 3$,
 - le cercle \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.
- (i) Montrer que l'équation du cercle peut s'écrire sous la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Préciser le centre et le rayon du cercle.
 - (ii) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la droite \mathcal{D} et le cercle \mathcal{C} .
 - (iii) Vérifier si le point $P(-1, -3)$ appartient à \mathcal{C} . Si oui, calculer la tangente à \mathcal{C} en ce point.

Exercice 7. On considère le triangle ABC défini par :

$$A(1, 2), \quad B(5, 6), \quad C(3, -2).$$

- (i) Calculer les longueurs des côtés AB , BC , et CA . Le triangle ABC est-il isocèle ?
- (ii) Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
- (iii) Trouver les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
- (iv) Calculer l'aire du triangle ABC .

Exercice 8. On donne les points :

$$A(1, 1), \quad B(4, 3), \quad C(6, 1).$$

- (i) Déterminer D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- (ii) Démontrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
- (iii) Calculer les coordonnées du centre de symétrie du parallélogramme $ABCD$.
- (iv) Si $ABCD$ est une figure modifiée par une homothétie de centre $O(0, 0)$ et de rapport $k = 2$, donner les nouvelles coordonnées des sommets. Conclusion ?

Exercice 9.

On considère les points $A(1, 2)$, $B(4, 5)$, et $C(6, 2)$.

- (i) Calculer l'angle entre les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} .
- (ii) Vérifier si le point $D(3, 4)$ appartient à la droite passant par A et B .
- (iii) Déterminer une équation paramétrique de la droite AC et une équation cartésienne de la droite BC .

Exercice 10. Soient les points $U(a, b)$ et $U'(a', b')$. Déterminer les points $M(x, y)$ tels que $\overrightarrow{MU} \cdot \overrightarrow{MU'} = 0$. Étudier la réciproque.