

Feuille 5

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y - 2z = 1 \\ x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (i) Lorsque c'est possible, effectuer les calculs AB , BA , A^2 et B^2 .
- (ii) Calculer A^t , AA^t et A^tA .

Exercice 3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Existe-t-il des matrices B telles que $BA = I_n$, n à déterminer ? Si oui, calculer AB .

Exercice 4. Donner deux matrices carrées A et B de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB \neq BA$.

Exercice 5. Déterminer toutes les matrices A de $M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$. Pour ces matrices, déterminer A^n pour tout entier $n \geq 0$. Déterminer une telle matrice A lorsqu'elle est inversible.

Exercice 6. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On souhaite calculer les puissances de M . Pour cela on note, pour $n \geq 1$, $M^n = \begin{pmatrix} a_n & x_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix}$.

- (i) Déterminer les valeurs de a_n , b_n et c_n pour tout entier $n \geq 1$.
- (ii) Montrer que $x_{n+1} = 1 + 2x_n$ pour tout entier n .
- (iii) On note $y_n = x_n + 1$. Déterminer l'expression de y_{n+1} en fonction de y_n .
- (iv) En déduire l'expression de y_n puis de x_n en fonction de n , et enfin l'expression de M^n .

Exercice 7. Calculer la puissance n -ème des matrices suivantes ($n \geq 1$) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (i) Montrer que $A^3 - 6A + 4I_4 = 0$.
- (ii) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 9. Soit la matrice à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Montrer l'existence de deux réels x et y tels que $A^2 + xA + yI_2 = 0$. Montrer que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. En déduire A^{-1} lorsque A est inversible.

Exercice 10.

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- (i) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
- (ii) Calculer $P^{-1}AP$.
- (iii) En déduire A^n , $n \geq 1$. Quel sens peut-on donner à A^n pour $n \leq 0$?

Exercice 11. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.

- (i) Donner un exemple d'une telle matrice.
- (ii) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A .
- (iii) Exprimer A^n , $n \geq 0$ en fonction de A .
- (iv) Exprimer A^{-n} , $n \geq 0$, en fonction de A .

Exercice 12.

- (i) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A - I_3)^n$, $n \geq 1$; en déduire A^n .
- (ii) Soit le système récurrent ($n \geq 0$)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \\ y_{n+1} = y_n - x_n \\ z_{n+1} = z_n - y_n \end{cases}$$

Ecrire ce système sous forme matricielle puis exprimer (x_n, y_n, z_n) en fonction de (x_0, y_0, z_0) .
