

Geometric and Arithmetic Methods in Number Theory

BESANÇON

APRIL 6-8, 2022

Organizing Committee

– Philippe Lebacque

Laboratoire de Mathématiques de Besançon, Université de Franche-Comté

philippe.lebacque@univ-fcomte.fr

– Christian Maire

FEMTO-ST, Université de Franche-Comté

christian.maire@univ-fcomte.fr

<https://www.femto-st.fr/fr/L-institut/evenements/methodes-arithmetiques-et-geometriques-en-theorie-des-nombres>

Schedule

The three days will take place in the *Centre Diocésain - Centre Grammont*.
<https://www.espacegrammont.fr/>

— Wednesday, April 6 2022 —

- 11am - 12 Welcome
 Lunch
- 2pm - 3pm Cécile Armana - *Sturm bounds for Drinfeld-type automorphic forms over function fields*
- 3:15 - 4:15 Floric Tavares Ribeiro - *A class formula for abelian Anderson modules*
- 4:45 - 5:45 François Brunault - *Mesures de Mahler de polynômes exacts*
 Dinner

— Thursday, April 7 2022 —

- 8:45-9:45 Gaëtan Chenevier - *Unimodular hunting*
- 10-11 Thomas Weigel - *A remark on Hilbert's theorem 94*
- 11:15-12 Farshid Hajir - *A group-theoretic method for detecting infinite unramified towers, with applications*
- Lunch
- 2-3 Ravi Ramakrishna - *On Ozaki's Theorem*
- 3:15-4:15 Anna Cadoret - *Sur le lieu de dégénérescence torique des systèmes locaux ℓ -adiques géométriques*
- 4:45-5:45 Donghyeok Lim - *The Wieferich phenomenon and the recent conjecture of Gras on the p -rationality of number fields*
- Dinner

— Friday, April 8 2022 —

- 8:45-9:45 Florent Jouve - *Disparités de répartition pour les automorphismes de Frobenius*
- 10-11 Richard Griffon - *New cases of the generalised Brauer-Siegel theorem*
- 11:15-12:15 Olivier Fouquet - *La conjecture principale de la théorie d'Iwasawa pour les formes modulaires et quelques conséquences*
- Lunch

Abstracts

CÉCILE ARMANA, UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ, FRANCE

Sturm bounds for Drinfeld-type automorphic forms over function fields

Sturm bounds say how many successive Fourier coefficients are sufficient to determine a modular form of a given weight and level. For classical modular forms, they also provide explicit bounds for the number of Hecke operators generating the Hecke algebra. I will review the situation over the rational function field $\mathbb{F}_q(t)$ for "Drinfeld-type" automorphic forms and their Hecke algebra. Sturm bounds are obtained using refinements of a fundamental domain for a Bruhat-Tits tree under the action of a congruence subgroup. This is a joint work with Fu-Tsun Wei (National Tsing Hua University, Taiwan).

FRANÇOIS BRUNAUT, ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON, FRANCE

Mesures de Mahler de polynômes exact

La mesure de Mahler des polynômes en plusieurs variables, introduite d'abord pour la théorie des nombres transcendants, apparaît dans plusieurs domaines des mathématiques. En particulier, des liens profonds ont été découverts entre mesures de Mahler et fonctions L . Le premier théorème en ce sens est dû à Smyth (1981), qui calcule la mesure du polynôme $1 + x + y$ en termes de la fonction L du caractère de Dirichlet de conducteur 3. Guilloux et Marché ont établi récemment une formule générale pour la mesure de Mahler des polynômes en 2 variables dits exacts, redonnant celle de Smyth. Je présenterai quelques questions suscitées par cette formule, en lien avec le groupe de Bloch des corps de nombres. Si le temps le permet, je parlerai d'un travail en cours avec Riccardo Pengo, où nous introduisons la notion d'exactitude successive, dans le but de déterminer sous quelles conditions on peut s'attendre à une formule agréable pour la mesure de Mahler, et quelle fonction L doit intervenir.

ANNA CADORET, SORBONNE UNIVERSITÉ, FRANCE

Sur le lieu de dégénérescence torique des systèmes locaux ℓ -adiques géométriques

L'étude du lieu des fibres dégénérées (i.e. possédant des cycles algébriques exceptionnels) dans une famille de variétés algébriques $f : Y \rightarrow X$ est l'un des problèmes centraux en géométrie arithmétique. Supposons le corps de base k de caractéristique 0 et la famille projective lisse. Dans ce cas, conjecturellement, la présence de cycles exceptionnels se détecte au niveau cohomologique. Pour la cohomologie singulière et $k = \mathbb{C}$, on dispose de résultats frappants; par ex. on sait que lorsque $f : Y \rightarrow X$ est le schéma abélien universel au-dessus d'une variété de Shimura, le lieu de dégénérescence est entièrement contrôlé par celui des fibres les plus dégénérées - les points CM ou toriques (Conjecture d'André-Oort). Pour la cohomologie ℓ -adique et k de type fini (disons un corps de nombres), on en sait beaucoup moins. J'expliquerai cependant pourquoi on s'attend à ce que pour toute extension finie k' de k il n'y ait qu'un nombre fini de points k' -rationnels toriques.

GAËTAN CHENEVIER, ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE PARIS, FRANCE

Unimodular hunting

In this talk, I will explain how to classify the isometry classes of unimodular integral euclidean lattices in rank up to 28. In particular, there are respectively 2566, 17059 and 374062 such lattices in rank 26, 27 and 28 (this last and most difficult computation is a joint work with Bill Allombert). As a general new ingredient, for any two lattices L and L' in a same (and arbitrary) genus, I prove an asymptotic formula for the proportion of Kneser p -neighbors of L which are isometric to L' , when the prime p goes to infinity.

OLIVIER FOUQUET, UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ, FRANCE

La conjecture principale de la théorie d'Iwasawa pour les formes modulaires et quelques conséquences

La conjecture principale de la théorie d'Iwasawa pour les formes modulaires prédit la variation p -adiques des valeurs spéciales des fonctions L des formes modulaires. Dans cet exposé, j'expliquerai les grandes lignes de sa démonstration ainsi que 3 de ses conséquences pour la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer.

RICHARD GRIFFON, UNIVERSITÉ CLERMONT-AUVERGNE, FRANCE

New cases of the generalised Brauer-Siegel theorem

Given an infinite sequence S of numbers fields one may try to describe, as K runs through S , the asymptotic behaviour of the product of the class number of K by the regulator of units of K , in terms of the discriminant of K . The classical Brauer-Siegel theorem answers this problem if the number fields in S have bounded degree. More recently, Tsfasman and Vladuts posited a conjectural answer to this question for more general sequences: if true, their conjecture, call it GBS, would provide a vast generalisation of the Brauer-Siegel theorem. GBS is known to hold conditionally to the Generalised Riemann Hypothesis, but also unconditionally in a limited number of cases. For instance, Lebacque and Zykina have shown that it holds for asymptotically exact families of stepwise Galois number fields. In this talk, I will report on a recent joint work with Philippe Lebacque, where we find new sets of sufficient conditions on a sequence of number fields for GBS to hold for this sequence. We also provide a variety of examples where these conditions are met. In particular, we prove that GBS holds for any infinite global field contained in a p -class field tower.

FARHID HAJIR, UNIVERSITY OF MASSACHUSETTS, USA

A group-theoretic method for detecting infinite unramified towers, with applications

The work of Golod and Shafarevich in the 1960s established that if the number of relations in a presentation of a pro- p group G is small as a function of its number of generators, then G is infinite. More refined versions of the Golod-Shafarevich theorem take into account information about the depth of the relations, not just their number. It can happen, for instance, that we cannot immediately conclude from a certain presentation P of G that G is infinite, but, somewhat counterintuitively, by adding more relations of special type to P , we can show a certain quotient H of G is infinite (and hence so is G). We give several

number-theoretic applications of this idea: to improvements in estimates for the Martinet function on root discriminants of number fields, to the existence of asymptotically good towers of number fields of p -power discriminant, and to a question of Ihara on unramified towers of number fields with infinitely many primes of the base that split completely. This is joint work with Christian Maire and Ravi Ramakrishna.

FLORENT JOUVE, UNIVERSITÉ DE BORDEAUX, FRANCE

Disparités de répartition pour les automorphismes de Frobenius

Étant donné une extension galoisienne de corps de nombres L/K , le théorème de Chebotarev affirme l'équirépartition des éléments de Frobenius, relatifs aux idéaux premiers non ramifiés, dans les classes de conjugaison de $\text{Gal}(L/K)$. On présentera une étude portant sur les variations du terme d'erreur dans le théorème de Chebotarev, lorsque L/K parcourt certaines familles d'extensions. On discutera plus en détail le problème de "type Linnik" sur la norme minimale des idéaux premiers dans un ensemble de Frobenius donné, ainsi que l'existence de phénomènes de "biais de Chebyshev" inconditionnels dans les corps de nombres. L'exposé porte sur des travaux communs avec D. Fiorilli.

DONGHYEOK LIM, EWHA WOMANS UNIVERSITY, SOUTH KOREA

The Wieferich phenomenon and the recent conjecture of Gras on the p -rationality of number fields

A prime number p is called a Wieferich prime to the base a if $a^{p-1} - 1$ is divisible by p^2 . It has been numerically observed and universally believed that such primes are extremely rare. However we have not enough information yet to determine whether such primes are infinite or not. Recently, Gras suggested some heuristics which imply that there are expected to be only finitely many Wieferich primes for each base. By generalizing the heuristics to arbitrary number fields, Gras made a conjecture that a number field is p -rational for all but finitely many primes p . In this talk, we briefly explain his heuristics. We also explain our recent result that if we assume the Siegel's heuristics on the Bernoulli numbers, there are expected to be only finitely many pairs of primes (p, l) such that l is a Sophie Germain prime and p is a primitive root modulo l and $\mathbb{Q}(\zeta_{2l+1})^+$ is non- p -rational. This result is a weak evidence for the conjecture of Gras.

RAVI RAMAKRISHNA, CORNELL UNIVERSITY, USA

On Ozaki's Theorem

About 10 years ago Ozaki proved the following theorem: Given any finite p -group G , there exists a number field K such that the Galois group over K of the p -Hilbert class field tower is G . Ozaki's K is totally complex. In joint work with Hajir and Maire we give a more general version of the theorem (e.g. K may be totally real) with a considerably simpler proof.

FLORIC TAVARES RIBEIRO, UNIVERSITÉ DE CAEN-NORMANDIE

A class formula for abelian Anderson modules

In 2012, Lenny Taelman proved an analogue of the class number formula for Drinfeld A -modules where A is a polynomial ring. It relates an L -series with quantities coming from a regulator of units and from a class module.

For an arbitrary coefficient ring A , several deep results generalizing this class formula have been obtained by various authors for families of Drinfeld A -modules, or even for some Anderson A -modules. We will present in this talk a new approach based on the notion of Stark units which are constructed via deformations of Anderson modules, and establish the class formula for a large family of Anderson modules containing the abelian Anderson modules and thus, in particular, all the Drinfeld modules.

This is a joint work with Bruno Anglès and Tuan Ngo Dac.

THOMAS WEIGEL, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA, ITALY

A remark on Hilbert's theorem 94

Hilbert's theorem 94 states that for a finite cyclic Galois extension L/K of number fields the order of $\ker(Cl_K \rightarrow Cl_L)$ is divisible by $|L : K|$. This theorem was certainly one major motivation for him to formulate the "principal ideal conjecture" which was proved by P. Furtwaengler some time later. In the lecture we want to investigate the question: What about $|\ker(Cl_K \rightarrow Cl_L)|/|L : K|$?



Sponsors

FEMTO-ST Institute

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

ANR FLAIR Project

Fédération Bourgogne Franche-Comté Mathématiques

Graduate School EIPHI-BFC

University of Franche-Comté

<https://www.femto-st.fr/fr>

<https://lmb.univ-fcomte.fr/>

<http://anrflair.math.cnrs.fr/>

<https://bfcmath.cnrs.fr/>

<http://gradschool.eiphi.univ-bfc.fr/>

<http://www.univ-fcomte.fr/>



April 1, 2022