SUR LES FORMULES ASYMPTOTIQUES LE LONG DES $\mathbb{Z}_\ell$-EXTENSIONS

par

Jean-François Jaulent, Christian Maire & Guillaume Perbet

Résumé. — Soit K_∞ une $\mathbb{Z}_\ell$-extension d'un corps de nombres K. Nous considérons le groupe de Galois $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ de la pro-ℓ-extension abélienne S-ramifiée et T-décomposée maximale attachée à chaque étage K_n de la tour K_∞/K. Dans ce travail, nous précisons les formules asymptotiques données par Jaulent-Maire dans [5] pour les ordres des quotients d'exposant ℓ^n des $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$, en fonction des invariants structurels ρ_T^S, μ_T^S et λ_T^S du module d'Iwasawa $\mathcal{X}_T^S := \varprojlim \mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$. Nous montrons en particulier que le paramètre lambda $\tilde{\lambda}_T^S$ de ces quotients peut différer sensiblement de l'invariant structurel λ_T^S et nous illustrons ces résultats par des exemples explicites dans lesquels il peut être rendu arbitrairement grand ou même arbitairement négatif.

Abstract. — Let K_∞ be a $\mathbb{Z}_\ell$-extension of a number field K. We consider the Galois group $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ of the maximal S-ramified and T-split abelian pro-ℓ-extension attached to each layer K_n of the tower K_∞/K. In this paper we clarify some asymptotic formulas given by Jaulent-Maire in [5], relating orders of ℓ^n-quotients of $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ to structural invariants ρ_T^S, μ_T^S et λ_T^S of the Iwasawa module $\mathcal{X}_T^S := \varprojlim \mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$. We especially show that the lambda invariant $\tilde{\lambda}_T^S$ of those quotients can sensibly differ from the structural invariant λ_T^S, and we illustrate this fact with explicit examples, where it can be made as large as desired, positive or negative.

1. Introduction

Supposons donnés un corps de nombres K, un nombre premier ℓ et une $\mathbb{Z}_\ell$-extension K_∞ de K.

Le résultat emblématique de la théorie d'Iwasawa (*cf. e.g.* [8]) affirme que les ordres respectifs $\ell^{x(n)}$ des ℓ-groupes de classes d'idéaux $\mathcal{C}\ell(K_n)$ attachés aux étages finis de la tour K_∞/K, de degrés respectifs $[K_n : K] = \ell^n$ sont donnés pour n assez grand par une formule explicite de la forme :

$$x(n) \;=\; \mu\ell^n \;+\; \lambda n \;+\; \nu,$$

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11R23, 11R29.
Mots clefs. — Théorie d'Iwasawa, groupes des classes, formules asymptotiques.

où ν est un entier relatif (éventuellement négatif), mais où λ et μ sont des entiers naturels déterminés par la pseudo-décomposition de la limite projective $\mathcal{X} = \varprojlim \mathcal{C}\ell(K_n)$, regardée comme module de torsion sur l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ construite sur un générateur topologique γ du groupe procyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Il est alors commode de réécrire l'égalité précédente sous une forme ne faisant intervenir que ces deux derniers paramètres :

$$x(n) \;\approx\; \mu\ell^n \;+\; \lambda n,$$

en convenant de tenir pour équivalentes deux suites d'entiers dont la différence est ultimement constante. L'identité obtenue vaut alors identiquement si l'on remplace les ℓ-groupes $\mathcal{C}\ell(K_n)$ par leurs quotients respectifs d'exposant ℓ^n (ou ℓ^{n+k}, pour k fixé), comme expliqué dans [2].

Soient maintenant S et T deux ensembles finis disjoints de places de K ; et soit $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ le groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de K_n qui est non-ramifiée en dehors des places divisant celles de S et totalement décomposée aux places au-dessus de celles de T. C'est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini qui correspond, par la théorie ℓ-adique du corps de classes (*cf.* [3]), au pro-ℓ-groupe des T-classes S-infinitésimales de K_n. C'est en ce sens une généralisation du ℓ-groupe des classes d'idéaux $\mathcal{C}\ell(K_n)$. Son quotient d'exposant ℓ^n, disons ${}^{\ell^n}\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$, est ainsi un ℓ-groupe ; et on s'attend à ce que la ℓ-valuation $x_T^S(n)$ de son ordre s'exprime asymptotiquement de façon simple à partir des invariants structurels du module d'Iwasawa limite projective pour les applications normes :

$$\mathcal{X}_T^S := \varprojlim \mathcal{C}\ell_T^S(K_n).$$

C'est le programme initié dans [2], puis développé dans [5] et dans [4]. La formule obtenue

$$x_T^S(n) \;\approx\; \rho_T^S n\ell^n \;+\; \mu_T^S\ell^n \;+\; \lambda_T^S n,$$

en dehors du cas spécial décrit plus loin (*cf.* Proposition 2.4), fait ainsi intervenir la dimension ρ_T^S du Λ-module $\mathcal{X}_T^S$ (*i.e.* la dimension sur le corps des fractions Φ de l'anneau Λ du tensorisé $\Phi \otimes_\Lambda \mathcal{X}_T^S$) ainsi que la ℓ-valuation μ_T^S et le degré λ_T^S du polynôme caractéristique de son sous-module de Λ-torsion $\mathcal{T}_T^S$.

Or, si cette formule est bien vérifiée dans nombre de situations (en particulier dès que le Λ-module $\mathcal{X}_T^S$ est de torsion), les calculs de Salle [7] font clairement apparaître qu'elle peut être en défaut, y compris dans le cas particulier des extensions cyclotomiques, par exemple lorsque l'invariant ρ_T^S est non nul et l'ensemble T non vide.

Le but du présent article est de rectifier les deux corollaires erronés (1.7 & 1.8) énoncés sans démonstration dans [4] et de produire une formule exacte. Le point essentiel est que les groupes de classes $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ ne sont pas donnés de façon simple (en dehors du cas spécial) comme quotients des genres à partir de leur limite projective $\mathcal{X}_T^S$, mais mettent en jeu non trivialement un module arithmétique, d'impact effectivement négligeable lorsque le Λ-module $\mathcal{X}_T^S$ est de torsion, mais non en général. La formule corrigée (*cf.* Théorème 2.6)

$$x_T^S(n) \;\simeq\; \rho_T^S\, n\ell^n \;+\; \mu_T^S\, \ell^n \;+\; (\lambda_T^S - \kappa_T^S)\, n,$$

fait alors apparaître un nouvel invariant κ_T^S, qui s'interprète comme le degré d'un polynôme cyclotomique convenable. La conséquence la plus spectaculaire est que le paramètre *lambda* effectif, qui intervient dans la formule *i.e.*

$$\tilde{\lambda}_T^S := \lambda_T^S - \kappa_T^S$$

peut être strictement négatif. Nous donnons en particulier des exemples très simples de tours cyclotomiques dans lesquelles, par un choix convenable de S et de T, il peut être rendu arbitrairement grand ou, au contraire, arbitrairement négatif.

2. Énoncé du Théorème principal

2.1. Notations et conventions. — Pour la commodité du lecteur, nous regroupons dans cette section les principales notations que nous utilisons tout au long de l'article.

– ℓ est un nombre premier (qui peut être 2) ;
– K est un corps de nombres et K_∞ une $\mathbb{Z}_\ell$-extension arbitraire de K ;
– K_n est l'unique sous-corps de K_∞ de degré ℓ^n sur K (on a ainsi $K = K_0$) ;

– $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$ est le groupe procyclique $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ et γ un (pro-)générateur ;
– $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ est l'algèbre d'Iwasawa associée à Γ ;
– $\Phi = \mathbb{Q}_\ell((\gamma - 1))$ est le corps des fractions de l'anneau Λ ;
– ω_n est le polynôme $\gamma^{\ell^n} - 1$ de l'anneau $\mathbb{Z}_\ell[\gamma - 1] = \mathbb{Z}_\ell[\gamma]$;
– $\omega_{n,e}$ désigne le quotient ω_n/ω_e pour $n > e$ (les $\omega_{i+1,i}$ sont ainsi les polynômes cyclotomiques ; ils sont irréductibles dans l'anneau $\mathbb{Z}_\ell[\gamma - 1]$) ;
– ∇_n est l'idéal de Λ engendré par le polynôme ω_n et l'élément ℓ^n.

– S et T sont deux ensembles finis disjoints (éventuellement vides) de places de K ;
– T^{td} l'ensemble des places de T totalement décomposées dans la tour K_∞/K et T^{fd} celui des places de T finiment décomposées dans la tour ;
– R est l'ensemble des places ultimement ramifiées dans K_∞/K (dans le cas de la tour cyclotomique, c'est l'ensemble des places de K au-dessus de ℓ) ;
– Pour un ensemble V de places de K, on note V_∞ l'ensemble des places de K_∞ au-dessus de celles de V.

– $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ est le pro-ℓ-goupe des T-classes S-infinitésimales du corps K_n (que la théorie du corps de classes identifie au groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne S-ramifiée T-décomposée maximale de K_n) ;
– $x_T^S(n) = \nu_\ell(|^{\ell^n}\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)|)$ est la valuation ℓ-adique du cardinal du quotient d'exposant ℓ^n du $\mathbb{Z}_\ell$-module $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$;
– ρ_T^S, μ_T^S et $\tilde{\lambda}_T^S$ sont les paramètres asymptotiques de la suite $x_T^S(n)$ (voir la définition 2.2) ;
– $\mathcal{X}_T^S$, limite projective des $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ pour la norme, s'identifie au groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne S_∞-ramifiée T_∞-décomposée maximale de K_∞ ;
– ρ_T^S, μ_T^S et λ_T^S sont les invariants d'Iwasawa du Λ-module noethérien $\mathcal{X}_T^S$.

Précisons enfin quelques définitions :

Définition 2.1. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers relatifs.
(i) Nous écrivons $a_n \simeq b_n$, lorsque la différence $a_n - b_n$ est bornée.
(ii) Nous écrivons $a_n \approx b_n$ lorsqu'elle est ultimement constante.

Définition 2.2. — Nous disons qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs est
(i) *paramétrée* par le triplet $(\rho, \mu, \tilde{\lambda})$ lorsqu'on a : $a_n \simeq \rho n\ell^n + \mu\ell^n + \tilde{\lambda}n$;
(ii) *strictement paramétrée* par $(\rho, \mu, \tilde{\lambda})$ lorsqu'on a : $a_n \approx \rho n\ell^n + \mu\ell^n + \tilde{\lambda}n$.
Dans les deux cas, nous disons alors que ρ, μ et $\tilde{\lambda}$ sont les *paramètres asymptotiques* de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 2.3. — Les conventions ci-dessus diffèrent légèrement de celle de [5] où sont considérés les quotients de ℓ^{n+1}-torsion, ce qui amène à écrire $\rho(n+1)\ell^n$ au lieu de $\rho n\ell^n$. La différence est purement technique et sans conséquence fondamentale comme expliqué plus loin (*cf.* Scolie 2.8).

2.2. Codescente arithmétique. — La théorie du corps de classes montre que les pro-ℓ-groupes $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ des T-classes S-infinitésimales s'identifient aux groupes de Galois respectifs des pro-ℓ-extensions abéliennes S-ramifiées T-décomposées maximales $H_T^S(K_n)$ des corps K_n. Ce sont en particulier des $\mathbb{Z}_\ell$-modules noethériens.

Leur limite projective $\mathcal{X}_T^S = \varprojlim \mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ est un Λ-module noethérien, qui s'interprète comme groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne S-ramifiée T-décomposée maximale $H_T^S(K_\infty)$ du corps K_∞.

Le problème classique de la codescente arithmétique consiste à exprimer les $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ à partir de la limite $\mathcal{X}_T^S$. Commençons par traiter le *cas spécial* où les $H_T^S(K_n)$ contiennent K_∞, ce qui se produit lorsque l'extension K_∞/K est S-ramifiée et T-décomposée, *i.e.* lorsque $T = T^{td}$ et que S contient l'ensemble R des places ramifiées dans la tour K_∞/K.

Dans ce cas, $H_T^S(K_n)$ n'est autre que le sous-corps de $H_T^S(K_\infty)$ fixé par $\omega_n\mathcal{X}_T^S$ (en notations additives) ; et le schéma de corps se présente comme suit :

$$\begin{tikzcd}
K_\infty \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\Gamma^{\ell^n}"] \arrow[dd, dash, dotted, bend right, "\Gamma"'] \arrow[rr, dash, dotted, bend left, "\mathcal{X}_T^S"] & H_T^S(K_n) \arrow[r, dash] \arrow[r, dash, dotted, bend right, "\omega_n\mathcal{X}_T^S"'] & H_T^S(K_\infty) \\
K_n \arrow[d, dash, "\Gamma_n"] \arrow[ur, dash, dotted, "\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)"'] & & \\
K \arrow[uurr, dash, dotted, bend right, "\mathcal{G}_T^S(K)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.4 **(codescente dans le cas spécial)**. — *Lorsque la $\mathbb{Z}_\ell$-extension K_∞/K est S-ramifiée et T-décomposée, pour tout $n \geqslant 0$ on a la décomposition directe :*
$$\mathcal{C}\ell_T^S(K_n) \simeq \Gamma^{\ell^n} \oplus \mathcal{X}_T^S/\omega_n\mathcal{X}_T^S.$$

Ce cas mis à part, les extensions $H_T^S(K_n)/K_n$ et K_∞/K_n sont linéairement disjointes pour n assez grand et les groupes $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ apparaîssent naturellement comme quotients de leur limite $\mathcal{X}_T^S$. Plus précisément :

Proposition 2.5 **(codescente dans le cas générique)**. — *En dehors du cas spécial, notons e le plus petit entier tel que, dans K_∞/K_e, les places de R non contenues dans S soient totalement ramifiées et celles de T^{fd} soient non décomposées.*
Il existe un $\mathbb{Z}_\ell$-sous-module noethérien $\mathcal{Y}_e$ de $\mathcal{X}_T^S$ tel que la somme $\mathcal{Y}_e + \omega_e\mathcal{X}_T^S$ soit un Λ-sous-module de $\mathcal{X}_T^S$ et que pour tout $n \geqslant e$ on ait canoniquement :
$$\mathcal{C}\ell_T^S(K_n) \simeq \mathcal{X}_T^S/(\omega_{n,e}\mathcal{Y}_e + \omega_n\mathcal{X}_T^S).$$

La preuve en est classique (voir par exemple [9], dans le cas $S = T = \emptyset$). Précisons néanmoins quelques points. Par un argument de projectivité, le groupe de Galois $\mathcal{G}_T^S = \mathrm{Gal}(H_T^S(K_\infty)/K)$ s'identifie au produit semi-direct de son quotient $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$ par le sous-groupe normal $\mathcal{X}_T^S = \mathrm{Gal}(H_T^S(K_\infty)/K_\infty)$:
$$\mathcal{G}_T^S \simeq \mathcal{X}_T^S \rtimes \Gamma;$$
de sorte que tout élément de $\mathcal{G}_T^S$ s'écrit de façon unique $\gamma^\alpha x$, avec $\alpha \in \mathbb{Z}_\ell$ et $x \in \mathcal{X}_T^S$, après avoir fait le choix d'un relèvement arbitraire de γ dans $\mathcal{G}_T^S(K)$.
Notons P_∞ l'ensemble fini des places de K_∞ qui sont ultimement ramifiées dans la tour K_∞/K mais non dans S_∞, ou encore contenues dans T_∞^{fd}. Pour chaque place de P_∞, choisissons une place $\mathfrak{p}_\infty$ de $H_T^S(K_\infty)$ qui soit au-dessus ; puis notons $G_{\mathfrak{p}_\infty}$ son sous-groupe de décomposition dans $\mathcal{G}_T^S(K_e) = \mathrm{Gal}(H_T^S(K_\infty)/K_e)$ si $\mathfrak{p}_\infty$ est au-dessus de T_∞^{fd}, d'inertie sinon. Par construction, chacun de ces groupes $G_{\mathfrak{p}_\infty}$ est procyclique et possède un générateur topologique de la forme $\gamma_e\, x_{\mathfrak{p}_\infty}$ avec $\gamma_e = \gamma^{\ell^e}$. De plus, si $\mathfrak{p}_\infty^x$ est conjuguée de $\mathfrak{p}_\infty$, le groupe $G_{\mathfrak{p}_\infty^x}$ est topologiquement engendré par le conjugugué $x(\gamma_e\, x_{\mathfrak{p}_\infty})x^{-1} = \gamma_e\, x_{\mathfrak{p}_\infty} x^{\gamma_e - 1}$.
Il en résulte que la sous-extension maximale de $H_T^S(K_\infty)$ qui est abélienne sur K_e et simultanément S-ramifiée et T-décomposée est celle fixée par $\mathcal{X}_T^{S\,(\gamma_e-1)}$ et les $\gamma_e\, x_{\mathfrak{p}_\infty}$ pour $\mathfrak{p}_\infty \in P_\infty$. Fixant arbitrairement l'une $\mathfrak{p}_\infty^\circ$ des places de P_∞ ; posant $y_{\mathfrak{p}_\infty} = x_{\mathfrak{p}_\infty}/x_{\mathfrak{p}_\infty^\circ}$; et notant $\mathcal{Y}_e$ le $\mathbb{Z}_\ell$-module multiplicatif engendré par les $y_{\mathfrak{p}_\infty}$, nous obtenons, comme attendu :
$$\mathcal{X}_T^S \cap \mathrm{Gal}(H_T^S(K_\infty)/H_T^S(K_e)) = \mathcal{X}_T^{S\,(\gamma_e-1)}\mathcal{Y}_e,$$
ce qui, traduit en notations additives, donne bien :
$$\mathcal{C}\ell_T^S(K_e) \simeq \mathcal{X}_T^S/(\mathcal{Y}_e + \omega_e\mathcal{X}_T^S).$$
Ce point acquis, le passage de K_e à K_n pour $n \geqslant e$ se fait en prenant l'image du dénominateur par l'opérateur norme $\omega_{n,e} = \omega_n/\omega_e$ et donne, comme annoncé :
$$\mathcal{C}\ell_T^S(K_n) \simeq \mathcal{X}_T^S/\omega_{n,e}(\mathcal{Y}_e + \omega_e\mathcal{X}_T^S) = \mathcal{X}_T^S/(\omega_{n,e}\mathcal{Y}_e + \omega_n\mathcal{X}_T^S).$$
En résumé l'ensemble de cette discussion peut être illustré par le diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
K_\infty \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[rr, dotted, dash, bend left, "\mathcal{X}_T^S"] \arrow[d, dotted, dash, bend left, "\Gamma^{\ell^n}"] \arrow[dd, dotted, dash, bend right, "\Gamma"'] & K_\infty H_T^S(K_n) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[r, dotted, dash, bend right, "\omega_n \mathcal{X}_T^S + \omega_{n,e}\mathcal{Y}_e"'] & H_T^S(K_\infty) \\
K_n \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[r, dotted, dash, bend right, "\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)"'] & H_T^S(K_n) & \\
K \arrow[rruu, dotted, dash, bend right, "\mathcal{G}_T^S(K)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

2.3. Le Théorème des paramètres. — Nous sommes dès lors en mesure d'énoncer le théorème principal de ce travail qui corrige les résultats de [4] et [5].

***Théorème 2.6* (Théorème des paramètres).** — *Soit K_∞ une $\mathbb{Z}_\ell$-extension d'un corps de nombres K ; et S et T deux ensembles finis disjoints de places de K ; enfin, soit $\mathcal{X}_T^S := \varprojlim \mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ la limite projective (pour la norme) des pro-ℓgroupes de T-classes S-infinitésimales des étages finis K_n (de degrés respectifs ℓ^n) de la tour K_∞/K.*

(i) Si l'extension K_∞/K est elle-même S-ramifiée et T-décomposée (i.e. dans le cas spécial), la suite $x_T^S(n)$ des ℓ-valuations des ordres des quotients d'exposant ℓ^n des groupes $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ vérifie l'estimation asymptotique :

$$x_T^S(n) \;\approx\; \rho_T^S\, n\ell^n \;+\; \mu_T^S\,\ell^n \;+\; (\lambda_T^S+1)\,n,$$

où ρ_T^S, μ_T^S et λ_T^S sont les invariants structurels du module d'Iwasawa $\mathcal{X}_T^S$.

(ii) Sinon, il existe un entier naturel $\kappa_T^S \leqslant \rho_T^S\ell^e$, où e est l'entier défini dans la proposition 2.5, tel qu'on ait asymptotiquement :

$$x_T^S(n) \;\simeq\; \rho_T^S\, n\ell^n \;+\; \mu_T^S\,\ell^n \;+\; (\lambda_T^S-\kappa_T^S)\,n,$$

Précisons quelques situations dans lesquelles le paramètre κ_T^S est trivial :

Scolie 2.7. — *En dehors du cas spécial, le paramètre κ_T^S se trouve être nul :*
(i) lorsque le module $\mathcal{X}_T^S$ est de Λ-torsion (i.e. lorsqu'on a : $\rho_T^S=0$) ;
(ii) et lorsque l'union de l'ensemble des places de R_∞ non contenues dans S_∞ et de l'ensemble des places de T_∞^{fd} est un singleton, cas dit trivial.
Dans ces deux cas, la suite $x_T^S(n)$ est paramétrée par les invariants structurels ρ_T^S, μ_T^S et λ_T^S du module d'Iwasawa $\mathcal{X}_T^S$.

Démonstration. — Comme nous le verrons plus loin, le paramètre κ_T^S provient de la contribution de $\mathcal{Y}_e$ dans la partie libre de $\mathcal{X}_T^S$. Dans le cas (i), la partie libre de $\mathcal{X}_T^S$ est nulle tandis que dans le cas trivial, le module $\mathcal{Y}_e$ est nul par construction. $\square$

Concluons ce paragraphe en précisant ce qui se passe lorsqu'on remplace les quotients d'exposant ℓ^n des groupes $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ par les quotients d'exposant $\ell^{(n+k)}$, pour un entier relatif k fixé :

Scolie 2.8. — *Sous les hypothèses du Théorème, pour tout entier relatif k fixé, les ℓ-valuations des ordres des quotients d'exposant $\ell^{(n+k)}$ des pro-ℓ-groupes $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ sont données asymptotiquement par la formule :*

$$x_T^S(n,k) \;\approx\; \rho_T^S\,(n+k)\ell^n \;+\; \mu_T^S\,\ell^n \;+\; (\lambda_T^S+1)\,n,$$

dans le cas spécial ; et :

$$x_T^S(n,k) \;\simeq\; \rho_T^S\,(n+k)\ell^n \;+\; \mu_T^S\,\ell^n \;+\; (\lambda_T^S-\kappa_T^S)\,n,$$

en dehors du cas spécial.

3. Preuve du Théorème des paramètres

Pour chaque entier naturel n, notons ∇_n l'idéal de l'anneau Λ engendré par le polynôme ω_n et l'élément ℓ^n. Nous allons procéder différemment suivant la nature de la codescente galoisienne dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension K_∞/K.

3.1. Le cas spécial et le cas trivial. — Dans le *cas spécial* où la $\mathbb{Z}_\ell$-extension K_∞/K est S-ramifiée et T-décomposée, la codescente est décrite par la Proposition 2.4 :

$$\mathcal{C}\ell_T^S(K_n) \simeq \Gamma^{\ell^n} \oplus \mathcal{X}_T^S/\omega_n\mathcal{X}_T^S.$$

Le *cas trivial* se produit, lui, lorsque l'union de l'ensemble des places de R_∞ non contenues dans S_∞ et de l'ensemble des places de T_∞^{fd} est un singleton. Le sous-module $\mathcal{Y}_e$, qui intervient dans la codescente décrite dans la proposition 2.5, est alors trivial ; de sorte que l'on a tout simplement :

$$\mathcal{C}\ell_T^S(K_n) \simeq \mathcal{X}_T^S/\omega_n\mathcal{X}_T^S.$$

Dans les deux cas, pour évaluer asymptotiquement les ordres des quotients ${}^{\ell^n}\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$, il suffit donc d'estimer les indices $(\mathcal{X}_T^S : \nabla_n\mathcal{X}_T^S)$. C'est ce qui est fait dans [2] et [4]. Pour cela, on se ramène d'abord à un module élémentaire :

Lemme 3.1 **([4], lemme 1.12)**. — *Soit $\varphi : \mathcal{X}_T^S \to E$ un pseudo-isomorphisme entre Λ-modules. Alors il existe des modules finis A et B tels que, pour n assez grand, on ait les suites exactes :*

$$0 \to A \to \mathcal{X}_T^S/\nabla_n\mathcal{X}_T^S \xrightarrow{\varphi} E/\nabla_n E \to B \to 0.$$

Le calcul de $v_p(|E/\nabla_n E|)$ pour un module élémentaire E est effectué dans [4] et conduit directement aux formules asymptotiques annoncées[(1)] :

[(1)] Avec les différences de conventions rappelées dans la remarque en fin de section 2.1

Théorème 3.2 **([4], théorème 1.4).** — *Dans le cas spécial, il existe une constante $\nu_T^S \in \mathbb{Z}$ telle que l'on ait :*

$$x_T^S(n) = \rho_T^S n\ell^n + \mu_T^S \ell^n + (\lambda_T^S + 1)n + \nu_T^S.$$

Dans le cas trivial (i.e. en dehors du cas spécial, mais lorsque le sous-module de descente $\mathcal{Y}_e$ est trivial), il existe une constante $\nu_T^S \in \mathbb{Z}$ telle que l'on ait :

$$x_T^S(n) = \rho_T^S n\ell^n + \mu_T^S \ell^n + \lambda_T^S n + \nu_T^S.$$

3.2. Le cas générique. — Venons en maintenant au cas général pour lequel le sous-module $\mathcal{Y}_e$ peut être non trivial. Comme précédemment, nous pouvons toujours nous ramener au cas élémentaire par pseudo-isomorphisme :

Lemme 3.3. — *Soit $\varphi : \mathcal{X}_T^S \to E$ un pseudo-isomorphisme entre Λ-modules et $\mathcal{Y}_e$ un sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module de $\mathcal{X}_T^S$. On note $Y_e = \varphi(\mathcal{Y}_e)$. On a :*

$$\nu_\ell(|\mathcal{X}_T^S/(\nabla_n \mathcal{X}_T^S + \omega_{n,e}\mathcal{Y}_e)|) \approx \nu_\ell(|E/(\nabla_n E + \omega_{n,e} Y_e)|).$$

Démonstration. — Pour chaque n assez grand, le lemme 3.1 fournit les suites exactes :

$$0 \to A \to \mathcal{X}_T^S/\nabla_n \mathcal{X}_T^S \xrightarrow{\varphi} E/\nabla_n E \to B \to 0\,;$$

puis les morphismes entre quotients finis :

$$\mathcal{X}_T^S/(\nabla_n \mathcal{X}_T^S + \omega_{n,e}\mathcal{Y}_e) \xrightarrow{\varphi} E/(\nabla_n E + \omega_{n,e} Y_e),$$

de conoyau B et de noyaux $A/(A \cap \omega_{n,e}\mathcal{Y}_e)$. Les noyaux vont croissant et sont de cardinal borné par $|A|$ donc stationnaire. La différence entre ℓ-valuations des ordres est ainsi ultimement constante.

Ce point acquis, nous pouvons remplacer $\mathcal{X}_T^S$ par le Λ-module élémentaire E auquel il est pseudo-isomorphe, puis $\mathcal{Y}_e$ par son image Y_e dans E. Et nous sommes alors amenés à déterminer la ℓ-valuation des quotients finis :

$$E/(\nabla_n E + \omega_{n,e} Y_e),$$

pour un module élémentaire $E = \Lambda^\rho \oplus (\oplus_{i=1}^d \Lambda/\Lambda f_i)$, avec $\rho = \rho_T^S$.

Pour effectuer ce calcul, il n'est pas possible de découper directement selon les facteurs directs de E à cause de la présence du sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module $\omega_{n,e} Y_e$. Pour contourner cette difficulté, nous allons estimer séparément les contibutions respectives de la partie libre $L = \Lambda^\rho$ et du sous-module de torsion $F = \oplus_i \Lambda/\Lambda f_i$, en écrivant :

$$\big(E : (\nabla_n E + \omega_{n,e} Y_e)\big) \;=\; \big(E : (F + \nabla_n E + \omega_{n,e} Y_e)\big)\,\big(F : F \cap (\nabla_n E + \omega_{n,e} Y_e)\big)$$

et en évaluant séparément les deux facteurs. □

3.2.1. La partie libre. — Il s'agit ici de calculer l'indice

$$\big(E : (F + \nabla_n E + \omega_{n,e} Y_e)\big) \;=\; \big(L : (\nabla_n L + \omega_{n,e} Y'_e)\big),$$

où Y'_e désigne l'image de Y_e dans le quotient $E/F \simeq L$.

On découpe le calcul de la façon suivante, où $Z_e = \omega_e L + Y'_e$:

$$\big(L : (\nabla_n L + \omega_{n,e} Y'_e)\big) = \big(L : (\ell^n L + Z_e)\big)\big(Z_e : (\ell^n L \cap Z_e + \omega_{n,e} Z_e)\big).$$

Pour déterminer le premier indice $\big(L:(\ell^n L+Z_e)\big)$, on écrit un pseudo-isomorphisme donné par le théorème de structure :

$$L/Z_e \sim \oplus_{i=1}^r \Lambda/g_i^{\alpha_i}\Lambda,$$

où les g_i sont des polynômes irréductibles divisant ω_e.
Il vient alors $\big(L:(\ell^n L+Z_e)\big)\approx(\Lambda^r:\oplus(g_i^{\alpha_i}\Lambda+\ell^n\Lambda))$ qui est paramétré par le triplet $(0,0,\deg(\prod g_i^{\alpha_i}))$.
Un calcul de $\mathbb{Z}_p$-rangs permet d'obtenir l'inégalité

$$\begin{array}{rcl}\rho\ell^e & = & \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p}(L/\omega_e L)\\ & \geqslant & \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p}(L/Z_e)\\ & = & \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p}(\oplus_{i=1}^r\Lambda/g_i^{\alpha_i}\Lambda)\\ & = & \deg(\prod g_i^{\alpha_i}).\end{array}$$

Le calcul du second indice est un peu plus technique. On se ramène au calcul des deux premiers termes de la suite exacte

$$(\ell^n L\cap Z_e+\omega_{n,e}Z_e)/(\ell^n Z_e+\omega_{n,e}Z_e)\hookrightarrow Z_e/(\ell^n Z_e+\omega_{n,e}Z_e)\twoheadrightarrow Z_e/(\ell^n L\cap Z_e+\omega_{n,e}Z_e).$$

Le Λ-module Z_e est sans torsion de rang ρ donc il existe un pseudo-isomorphisme $Z_e\sim\Lambda^\rho$, qui nous informe que le terme central de la suite est paramétré par $(\rho,0,-\rho\ell^e)$.
Reste à voir que le noyau est stationnaire.
On a

$$(\ell^n L\cap Z_e+\omega_{n,e}Z_e)/(\ell^n Z_e+\omega_{n,e}Z_e)\simeq(\ell^n L\cap Z_e)/(\ell^n Z_e+\ell^n L\cap\omega_{n,e}Z_e).$$

Notons $\ell^{-n}Z_e=\{x\in L\mid \ell^n x\in Z_e\}$, de telle sorte que la suite $(\ell^{-n}Z_e)_n$ est une suite croissante de sous-Λ-modules de L. Cette suite est stationnaire par noethérianité donc il existe un entier α tel que $\ell^{-n}Z_e=\ell^{-\alpha}Z_e$ pour $n\geqslant\alpha$. Pour de tels n, on a $\ell^n L\cap Z_e=\ell^n(\ell^{-\alpha}Z_e)$ et $\ell^n L\cap\omega_{n,e}Z_e=\omega_{n,e}\ell^n(\ell^{-\alpha}Z_e)$ par factorialité de L.
Ainsi,

$$\begin{array}{rcl}(\ell^n L\cap Z_e)/(\ell^n Z_e+\ell^n L\cap\omega_{n,e}Z_e) & = & \ell^n(\ell^{-\alpha}Z_e)/\ell^n(Z_e+\omega_{n,e}(\ell^{-\alpha}Z_e))\\ & \simeq & \ell^{-\alpha}Z_e/(Z_e+\omega_{n,e}(\ell^{-\alpha}Z_e)),\end{array}$$

Le dernier isomorphisme se justifiant par l'absence de torsion. Le noyau est stationnaire dès lors que le quotient $\ell^{-\alpha}Z_e/Z_e$ est fini.
Mais $L/\omega_e L$ est de type fini sur $\mathbb{Z}_\ell$, donc son sous-module $\ell^{-\alpha}Z_e/\omega_e L$ aussi ; et par suite, son quotient $\ell^{-\alpha}Z_e/Z_e$ aussi. Ce dernier quotient étant par définition tué par ℓ^α, il est fini.
Finalement, on a

$$\nu_\ell\big(E:(F+\nabla_n E+\omega_{n,e}Y_e)\big)\approx\rho_T^S n\ell^n-\kappa_T^S n,$$

avec $\kappa_T^S=\rho_T^S\ell^e-\prod\deg(g_i^{\alpha_i})$ compris entre 0 et $\rho_T^S\ell^e$.

3.2.2. La partie de torsion. — Étudions maintenant le second facteur : $\big(F:F\cap(\nabla_n E+\omega_{n,e}Y_e)\big)$. C'est évidemment une fonction décroissante du module de descente Y_e. Nous en obtenons donc une majoration très simple en remplaçant Y_e par 0 ; et une minoration en remplaçant Y_e par la somme directe $Y_e^\circ\oplus\hat{Y}_e=Y_e^\circ\oplus(\oplus_{i=1}^d Y_e^{(i)})$ de ses projections sur les $d+1$ facteurs directs L et $\Lambda/f_i\Lambda$ de la décomposition $E=L\oplus(\oplus_{i=1}^d\Lambda/f_i\Lambda)$.

Dans le premier cas, nous obtenons :

$$F/(F \cap \nabla_n E) = F/\nabla_n F = \oplus_{i=1}^{d} \Lambda/(\nabla_n + f_i \Lambda)\,;$$

tandis que dans le second, il vient :

$$F/(F \cap (\nabla_n E + \omega_{n,e}(Y_e^\circ \oplus \hat{Y}_e))) = F/(\nabla_n F + \omega_{n,e}\hat{Y}_e) = \oplus_{i=1}^{d} \Lambda/(\nabla_n + f_i\Lambda + \omega_{n,e}Y_e^{(i)}).$$

Le calcul de l'indice $\big(\Lambda : \nabla_n + f\Lambda\big)$ est mené à bien dans [4] §1.2. On a :

(i) $\nu_\ell\big((\Lambda : \nabla_n + f\Lambda)\big) \approx \ell^m$, pour $f = \ell^m$; et

(ii) $\nu_\ell\big((\Lambda : \nabla_n + f\Lambda)\big) \approx \deg(P)\, n$, si f est un polynôme distingué P.

Et il reste à voir qu'on obtient essentiellement le même résultat, lorsqu'on remplace $(\nabla_n + f\Lambda)$ par $(\nabla_n + f\Lambda + \omega_{n,e}Z)$, pour un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini Z.

Considérons donc le quotient : $C = (\nabla_n + f\Lambda + \omega_{n,e}Z)/(\nabla_n + f\Lambda)$.

(i) Pour $f = \ell^m$ et $n \geqslant m$, il vient directement :

$$C \simeq \omega_{n,e}Z/(\omega_{n,e}Z \cap (\ell^m\Lambda + \omega_n\Lambda)) \simeq Z/(Z \cap (\ell^m\Lambda + \omega_e\Lambda)).$$

(ii) Et, pour f distingué, le lemme 1.6 de [4] donne, pour $n \geqslant n_\circ$ assez grand :

$$(\omega_{n,e}Z + \nabla_n + f\Lambda)/f\Lambda = (\ell^{n-n_\circ}(\omega_{n_\circ,e}Z + \nabla_{n_\circ}) + f\Lambda)/f\Lambda\,; \text{ d'où :}$$

$$C \simeq (\ell^{n-n_\circ}(\omega_{n_\circ,e}Z + \nabla_{n_\circ}) + f\Lambda)/(\nabla_n + f\Lambda) \simeq \omega_{n_\circ,e}Z/(\omega_{n_\circ,e}Z \cap (\nabla_{n_\circ} + f\Lambda)).$$

En fin de compte, on voit que dans tous les cas le module C est ultimement constant. On a donc

$$\nu_\ell\big((F : F \cap (\nabla_n E + \omega_{n,e}Y_e))\big) \;\simeq\; \mu_T^S \ell^n + \lambda_T^S n$$

ce qui achève la démonstration du Théorème des paramètres.

4. Illustrations arithmétiques

Nous allons maintenant illustrer le résultat obtenu en montrant que le paramètre $\tilde{\lambda}_T^S$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes, *positives* comme *négatives* dans le cas réputé le plus simple des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions cyclotomiques.

Nous nous appuyons pour cela sur les identités de dualité obtenues par Jaulent et Maire [5], que nous commençons par rappeler.

4.1. Identités du miroir. — Supposons que le corps de nombres K contienne le groupe $\mu_{2\ell}$ des racines 2ℓ-ièmes de l'unité. Dans [5], il est alors établi, le long de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K, des identités de dualité mettant en jeu, les paramètres $(\rho_T^S, \mu_T^S, \tilde{\lambda}_T^S)$ de $x_T^S(n)$ et ceux de $x_S^T(n)$. Ces identités ne sont pas affectées par l'erreur corrigée dans le présent article puisque les suites $(x_T^S(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_S^T(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont paramétrées en vertu du Théorème 2.6. En ce qui concerne les deux premiers invariants, il est possible de les extraire directement du Théorème 6 de [5] ; pour le troisième invariant, il y a lieu, en revanche, de remplacer l'invariant structurel λ par le paramètre asymptotique $\tilde{\lambda}$ qui peut en différer sensiblement. Nous donnons ci-dessous la forme correcte du théorème.

Notons $s_\infty = |S_\infty|$ et $t_\infty = |T_\infty|$ les nombres respectifs de places de K_∞ au-dessus de S et de T, qui sont finis du fait qu'aucune place n'est totalement décomposée dans l'extension cyclotomique ; puis posons :

$$\delta_S = \sum_{\mathfrak{p}\in S_\ell} [K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p] \qquad \text{et} \qquad \delta_T = \sum_{\mathfrak{p}\in T_\ell} [K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p],$$

où S_ℓ et T_ℓ désignent les sous-ensembles de places ℓ-adiques de S et de T.

Avec ces notations, le Théorème du miroir s'énonce comme suit :

***Théorème 4.1* (Jaulent, Maire, [5], théorème 6).** — *Sous les hypothèses suivantes :*
(i) Le corps K contient le groupe $\mu_{2\ell}$ des racines 2ℓ-ièmes de l'unité,
(ii) K_∞ est la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K,
(iii) $S \cup T$ contient l'ensemble des places au-dessus de ℓ,
les paramètres associés aux ℓ-groupes ${}^{\ell^n}\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ de T-classes S-infinitésimales le long de la tour K_∞/K vérifient les identités du miroir :
(i) $\rho_T^S + \frac{1}{2}\delta_T = \rho_S^T + \frac{1}{2}\delta_S$;
(ii) $\mu_T^S = \mu_S^T$;
(iii) $\tilde{\lambda}_T^S + t_\infty = \tilde{\lambda}_S^T + s_\infty$

Ce résultat, qui repose sur les identités de dualité obtenues par G. Gras [1] (lesquelles peuvent être regardées comme la forme la plus aboutie du Spiegelungssatz de Leopoldt), permet d'échanger décomposition et ramification.

4.2. Minoration du paramètre lambda. — Une conséquente immédiate des théorèmes de réflexions (et de l'existence des paramètres $\tilde{\lambda}_T^S$) est de donner des minorations très simples de l'invariant λ_T^S lorsque S contient les places ℓ-adiques.

Proposition 4.2. — *Soient K un corps de nombres contenant les racines 2ℓ-ièmes de l'unité, K_∞ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique, S un ensemble fini de places de K qui contient l'ensemble R de celles ramifiées dans K_∞/K (i.e. l'ensemble des places au-dessus de ℓ) et T un ensemble fini de places modérées disjoint de S. Alors*

$$\lambda_T^S \geqslant s_\infty - 1.$$

En particulier, λ_T^S est arbitrairement grand avec S.

Démonstration. — Les identités du miroir nous donnent pour $T = \emptyset$:

$$\lambda^S + 1 = \tilde{\lambda}^S \ = \ \tilde{\lambda}_S \ + \ s_\infty \ = \ \lambda_S \ + \ s_\infty \ \geqslant \ s_\infty,$$

puisque, dans le cas spécial, $\tilde{\lambda}^S = \lambda^S + 1$ et que, pour le module de Λ-torsion $\mathcal{X}_S$, le paramètre effectif coïncide avec l'invariant d'Iwasawa.
La montée dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique ayant épuisé toute possibilité d'inertie aux places modérées, on a banalement $\mathcal{X}_T^S = \mathcal{X}_\emptyset^S$, donc $\lambda_T^S = \lambda^S$. □

4.3. Valeurs négatives du paramètre lambda. — Revenons maintenant sur le contexte général du théorème des paramètres : les invariants structurels d'un Λ-module étant des entiers naturels, le théorème 2.6 nous donne les minorations :

Proposition 4.3. — *Le cas spécial mis à part, sous les hypothèses du Théorème des paramètres, les paramètres lambda vérifient l'inégalité :*

$$\tilde{\lambda}_T^S \;=\; \lambda_T^S \;-\; \kappa_T^S \;\geqslant\; -\kappa_T^S \;\geqslant\; -\rho_T^S\,\ell^e$$

où e est l'entier défini dans la proposition 2.5.

Nous allons voir que cette borne inférieure est effectivement atteinte et montrer en particulier que le paramètre $\tilde{\lambda}_T^S$ peut ainsi être arbitrairement négatif.

Pour cela, nous allons nous replacer dans le contexte cyclotomique.

• **Exemple 1** : ℓ=2 , $K = \mathbb{Q}[i]$

Proposition 4.4. — *Prenons ℓ=2, $e \geqslant 0$ arbitraire, $K = K_0 = \mathbb{Q}[i]$ et notons $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique de K. Prenons $S = R = \{\mathfrak{l}\}$, où $\mathfrak{l}$ est l'unique place de K au-dessus de 2, et $T = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$, où $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sont les deux places de K au-dessus d'un premier $p \neq 2$ complètement décomposé dans $K_e/\mathbb{Q}$ et inerte dans K_∞/K_e (i.e. vérifiant la congruence : $p \equiv 1 + 2^{e+1} \mod 2^{e+2}$).*

Les invariants structurels et les paramètres attachés aux ℓ-groupes $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ de T-classes S-infinitésimales sont alors :

$$\rho_T^S = 1, \qquad \mu_T^S = 0, \qquad \lambda_T^S = 0, \qquad \tilde{\lambda}_T^S = -2^e.$$

Démonstration. — Déterminons tout d'abord le module à l'infini $\mathcal{X}_T^S$. Comme on est au-dessus de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique, on a $\mathcal{X}_T^S = \mathcal{X}^S$ du fait que les places modérées non ramifiées sont totalement décomposées au-dessus de K_∞. Il est bien connu que $\mathcal{X}^S$ est Λ-libre et de rang 1 dans ce cadre (*cf. e.g.* [9]). Expliquons brièvement pourquoi :

– d'un côté, les théorèmes de dualité (*cf.* Th. 4.1 (i)) donnent directement :
$$\rho^S = \tfrac{1}{2}\delta_S = \tfrac{1}{2}[K_{\mathfrak{l}} : \mathbb{Q}_2] = 1.$$

– d'un autre, le radical kummérien de la 2-extension abélienne 2-ramifiée 2-élémentaire maximale M de K est $E'_K/E'_K 2 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})2$; de sorte que $\mathcal{X}^S/\nabla_0\mathcal{X}^S \simeq \mathrm{Gal}(M/K_1)$ est cyclique et que $\mathcal{X}^S$ est Λ-monogène.

En résumé, on a donc $\mathcal{X}_T^S = \mathcal{X}^S \simeq \Lambda$ et, en particulier, $\rho_T^S = 1$ mais $\mu_T^S = \lambda_T^S = 0$.

Ce point acquis, pour tout $n \geqslant e$, la codescente pour $\mathcal{C}\ell_T^S$ s'écrit :

$$\mathcal{C}\ell_T^S(K_n) \simeq \mathcal{X}_T^S/\omega_{n,e}(\omega_e\mathcal{X}_T^S + \mathcal{Y}_e) \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{C}\ell_T^S(K_e) \simeq \mathcal{X}_T^S/(\omega_e\mathcal{X}_T^S + \mathcal{Y}_e).$$

Maintenant, la théorie ℓ-adique du corps de classes (*cf.* [3]) nous dit que le rang essentiel du groupe $\mathcal{C}\ell_T^S(K_e)$ est égal à celui du module $\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}(K_e)/s_2(\mathcal{E}^T(K_e))$, quotient du 2-groupe des unités locales attaché à l'unique place 2-adique de K_e par l'image canonique du $\mathbb{Z}_2$-tensorisé du groupe des T-unités $E^T(K_e)$ de K_e.

Or, à un fini près, $\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}(K_e)$ définit la représentation régulière du groupe de Galois $G_e = \mathrm{Gal}(K_e/\mathbb{Q})$ et $\mathcal{E}^T(K_e)$ contient de même la représentation régulière du fait que p est totalement décomposé dans $K_e/\mathbb{Q}$. La conjecture de Jaulent (*cf. e.g.* [3]), qui est ici vérifiée puisque G_e est abélien, nous assure que $s_2(\mathcal{E}^T(K_e))$ la contient encore ; ce qui montre que le groupe $\mathcal{C}\ell_T^S(K_e)$ est fini.

Il vient donc :

$$(\omega_e \mathcal{X}_T^S + \mathcal{Y}_e) \sim \mathcal{X}_T^S \simeq \Lambda \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}\ell_T^S(K_n) \sim \mathcal{X}_T^S/\omega_{n,e}\mathcal{X}_T^S \simeq \Lambda/\omega_{n,e}\Lambda$$

avec $\omega_{n,e} = \omega_n/\omega_e$; ce qui donne bien : $\tilde{\lambda}_T^S = -\deg \omega_e = -2^e$, comme annoncé. □

• **Exemple 2** : ℓ premier régulier, $K = \mathbb{Q}[\zeta_\ell]$

Proposition 4.5. — *Soit $\ell > 2$ un nombre premier régulier, $e \geqslant 0$ arbitraire, $K = K_0 = \mathbb{Q}[\zeta_\ell]$ le ℓ-ième corps cyclotomique et $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K. Prenons $S = R = \{\mathfrak{l}\}$, où $\mathfrak{l}$ est l'unique place de K au-dessus de ℓ, et $T = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_{\ell-1}\}$, où les $\mathfrak{p}_i$ sont au-dessus d'un premier p complètement décomposé dans $K_e/\mathbb{Q}$ et inerte dans K_∞/K_e (i.e. vérifiant la congruence : $p \equiv 1 + \ell^e \mod \ell^{e+1}$).*

Les invariants structurels et les paramètres attachés aux ℓ-groupes $\mathcal{C}\ell_T^S(K_n)$ de T-classes S-infinitésimales sont alors :

$$\rho_T^S = (\ell-1)/2, \qquad \mu_T^S = 0, \qquad \lambda_T^S = 0, \qquad \tilde{\lambda}_T^S = -\ell^e(\ell-1)/2.$$

Démonstration. — Introduisons le groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ et notons Δ^* le groupe des caractères ℓ-adiques de Δ. À chaque élément φ de Δ^* correspond alors un idempotent primitif e_φ de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, ce qui permet d'écrire canoniquement tout $\Lambda[\Delta]$-module comme somme directe de ses φ-composantes.

Ceci vaut en particulier pour les groupes $\mathcal{X}_T^S = \mathcal{X}^S$:

– Si φ est *réel* (*i.e.* si φ prend la valeur $+1$ sur la conjugaison complexe), l'hypothèse de régularité entraîne la trivialité de la φ-composante $(\mathcal{X}^S)_\varphi$.
– Si φ est *imaginaire* (*i.e.* si φ prend la valeur -1 sur la conjugaison complexe), il vient au contraire, comme plus haut : $(\mathcal{X}^S)_\varphi \simeq \Lambda e_\varphi \simeq \Lambda$.

Les arguments développés dans l'exemple précédent appliqués *mutatis mutandis* aux φ-composantes des pro-ℓ-groupes de T-classes S-infinitésimales donnent donc :

(i) $\rho = \mu = \lambda = \tilde{\lambda} = 0$, pour les φ réels ;

(ii) $\rho = 1$ et $\mu = \lambda = 0$ mais $\tilde{\lambda} = -\ell^e$, pour les φ imaginaires.

D'où le résultat attendu en sommant sur les $(\ell - 1)$ caractères du groupe Δ. □

Références

[1] G. Gras, *Théorèmes de réflexion*, J. Théor. Nombres de Bordeaux **10** n° 2 (1998), 399–499.

[2] J.-F Jaulent, *L'arithmétique des l-extensions* (Thèse d'État), Pub. Math. Fac. Sci. Besançon Théor. Nombres 1985–86 (1986).

[3] J.-F. Jaulent, *T*héorie ℓ-adique globale du corps de classes, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[4] J.-F. Jaulent, *Généralisation d'un théorème d'Iwasawa*, J. Théor. Nombres de Bordeaux **17** n° 2 (2005), 527–553.

[5] J.-F. Jaulent et C. Maire, *Sur les invariants d'Iwasawa des tours cyclotomiques*, Canadian Math. Bull. **46** (2003), 178–190.

[6] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, GMW 323, Springer (2008).

[7] L. Salle, *On maximal tamely ramified pro-2-extensions over the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of an imaginary quadratic field*, Osaka Journal of Math. **47** n° 4 (2010).

[8] J.-P. Serre, *Classes des corps cyclotomiques (d'après Iwasawa)*, Séminaire Bourbaki, exp. n° 174 (1958).

[9] L. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, second edition, Springer-Verlag (1997).

---

4 avril 2012

Jean-François Jaulent, Univ. Bordeaux, Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251, 351 cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex • CNRS, Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251, 351, cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex *E-mail :* Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux1.fr

Christian Maire, Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 6623, UFR Sciences et Techniques, 16 route de Gray, F-25030 Besançon • *E-mail :* christian.maire@univ-fcomte.fr

Guillaume Perbet, Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 6623, UFR Sciences et Techniques, 16 route de Gray, F-25030 Besançon • *E-mail :* guillaume.perbet@univ-fcomte.fr