

## ARITHMÉTIQUE 2

---

### Exercice 1.

- (i) Déterminer les représentants principaux des classes de congruence suivantes :  $[223]_7$ ,  $[354]_7$ ,  $[1568]_7$ .
- (ii) Parmi ces classes, a-t-on deux classes identiques ?

### Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$ .

- (i) Montrer que  $n$  est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- (ii) Montrer que  $n$  est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- (iii) Sur le modèle des deux caractérisations précédentes, donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $n$  soit divisible par 11.

### Exercice 3.

- (i) Quel est le reste de la division euclidienne de  $13^{20}$  par 7 ?
- (ii) Quel est le reste de la division euclidienne de  $2017^{2018}$  par 5 ? par 11 ? par 15 ?
- (iii) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'entier  $5n^3 + n$  est divisible par 6.
- (iv) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'entier  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  est divisible par 7.
- (v) Déterminer un entier  $a \geq 0$  tel que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on ait :  $3^{n+a} - 4^{4n+2} \equiv 0 \pmod{11}$ .

- (vi) Déterminer un entier  $a \geq 0$  tel que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on ait :  
 $5^{n+1} - 7^{3n+a} \equiv 0 \pmod{13}$ .

**Exercice 4.**

- (i) Trouver les entiers  $x \in \mathbb{Z}$  tels que  $x \equiv 3 \pmod{7}$  et  $x \equiv 5 \pmod{15}$ .  
(ii) Trouver les entiers  $x \in \mathbb{Z}$  tels que  $x \equiv 21 \pmod{37}$  et  $x \equiv 130 \pmod{181}$ .  
(iii) Trouver le plus entier  $x \in \mathbb{N}$  tels que  $x \equiv 8 \pmod{14}$ ,  $x \equiv 5 \pmod{23}$   
et  $x \equiv 13 \pmod{29}$ .

**Exercice 5.** Déterminer les tables d'addition et de multiplication de  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  et de  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ . Préciser l'inverse de chaque classe (lorsque celle-ci existe).

**Exercice 6.**

- (i) Déterminer les inverses de  $[11]_{23}$ ,  $[35]_{13}$ ,  $[13]_{35}$ , et  $[123]_{88}$ .  
(ii) Trouver les entiers  $x \in \mathbb{Z}$  vérifiant  $35x \equiv 2 \pmod{13}$ .  
(iii) Trouver les entiers  $x \in \mathbb{Z}$  vérifiant  $37x \equiv 2 \pmod{131}$ .

**Exercice 7.**

- (i) Déterminer les carrés de  $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$ .  
(ii) Résoudre dans  $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$  l'équation  $X^2 + 2X + [6]_{23} = [0]_{23}$ .  
(iii) Donner les entiers  $x \in \mathbb{Z}$  tels que 23 divise  $x^3 + 2x^2 + 6x$ .

**Exercice 8.**

- (i) Déterminer les carrés de  $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ .  
(ii) Donner les entiers  $x \in \mathbb{Z}$  tels que 29 divise  $x^2 + x - 1$ .  
(iii) Donner les entiers  $x \in \mathbb{Z}$  tels que 29 divise  $x^2 + x + 1$ .