Université de Franche-Comté / 2023-2024 Mathématiques
CMI Info 2ème année

Arithmétique 1

Exercice 1.

(i) Donner la liste complète des diviseurs de 20, 50 et 55.

(ii) En déduire $\text{pgcd}(20, 50)$, $\text{pgcd}(20, 55)$ et $\text{pgcd}(50, 55)$.

Exercice 2. Déterminer $6\mathbb{Z}+14\mathbb{Z}$, $6\mathbb{Z}+21\mathbb{Z}$, $14\mathbb{Z}+21\mathbb{Z}$ et $6\mathbb{Z}+14\mathbb{Z}+21\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Que vaut $\text{pgcd}(222, 344)$? Déterminer deux entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $222x + 344y = 2$.

Exercice 4. Résoudre les équations diophantiennes suivantes :

- $2018x + 203y = 1$.
- $2019x + 203y = 1$.

Exercice 5. Trouver les entiers $a \in \mathbb{Z}$ tels que l'équation $4558x+9546y = a$ possède une solution $x, y \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6. Un nombre entier n est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts (c'est à dire à la somme des entiers d tels que $1 \leq d < n$ et $d \mid n$). Vérifier que 6, 28 et 496 sont parfaits.

Exercice 7. Donner la liste des nombres premiers plus petits que 150.

Exercice 8. Les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, sont appelés nombres de Fermat.

(i) Calculer F_0, F_1, F_2, F_3, F_4.

(ii) Montrer que ces nombres sont des nombres premiers.

(iii) Vérifier que F_5 est divisible par 641.

(iv) Montrer que si $2^k + 1$ est un nombre premier alors k est une puissance de 2.

Exercice 9. Les nombres de la forme $M_n = 2^n - 1$ sont appelés nombres de Mersenne.

(i) Calculer M_2, M_3, M_4, M_5, M_7, M_{11}.

(ii) Factoriser ces nombres.

(iii) Montrer que si M_n est un nombre premier alors n est un nombre premier.

(iv) Montrer que si M_n est un nombre premier alors $2^{n-1}M_n$ est un nombre parfait.
