Université de Franche-Comté / 2023-2024 Mathématiques
CMI Info 2ème année

Diagonalisation

Exercice 1. Pour chacune des matrices réelles suivantes, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et le polynôme minimal. Indiquer les matrices diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 & -5 \\ -3 & -3 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

(i) Déterminer les sous-espaces propres des matrices de l'exercice 1. Lorsque la matrice est diagonalisable, la diagonaliser.

(ii) Calculer A^n et C^n pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(iii) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Exercice 3. On considère la matrice M suivante ($m \in \mathbb{R}$ est un paramètre)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

(i) Vérifier que le réel $\lambda = m$ est une valeur propre de M puis déterminer toutes les valeurs propres de M.

(ii) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice M est-elle diagonalisable ?

(iii) Diagonaliser M lorsque celle-ci est diagonalisable.

Exercice 4.

Soit la matrice à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, où t est un paramètre.

(i) Déterminer le polynôme caractéristique P_A de A.

(ii) Montrer que la matrice A a une unique valeur propre réelle (à déterminer) si et seulement si, $t < -2$. Dans ce cas, que peut-on dire sur la diagonalisation de A ?

(iii) Montrer qu'il existe *deux* valeurs de t, notées t_1 et t_2, pour lesquelles la matrice A a exactement deux valeurs propres distinctes que l'on déterminera.

(iv) Déterminer le polynôme minimal de A quand $t = t_1$ puis quand $t = t_2$.

(v) En déduire l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles la matrice A est diagonalisable. (On ne demande pas de diagonaliser A !)

Exercice 5. Triangulariser les matrices de l'exercice 1 lorsque c'est possible.

Exercice 6. Soit une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_n$ inversible et soit $A \in \mathrm{M}_n$ quelconque.
1) Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout réel $|t| \geq t_0$, la matrice $A+tD$ est inversible.
2) On suppose A inversible. Montrer qu'il existe $t_0 < 0 < t_1$ tels que la matrice $A + tD$ est inversible pour tout $t \in [t_0, t_1]$.