Licence Sciences fondamentales et Applications 1ère année - 2024/25

Parcours aménagé

Feuille 9

Exercice 1. Calculer les premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 des suites suivantes

$$u_n = n^2 + 1 \quad ; \quad u_n = \frac{n^3 - 1}{n + 1} \quad ; \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{u_n + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n^2 + 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = -1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n + 2 \end{cases} \quad ; \quad u_n = 2^n \quad ; \quad u_n = (-1)^n$$

Exercice 2. Calculer $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$.

Exercice 3. Calculer $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{19} + 3^{20}$.

Exercice 4. Calculer $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{1024}$.

Exercice 5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$. On pose $v_n = u_n + 3$.

(i) Calculer u_1, u_2, v_0 et v_1 et v_2.

(ii) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

(iii) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

(iv) Que vaut la limite de u_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 6. Une étude sur une île fait apparaître l'observation suivante : sur une année, environ 5% d'une certaine population d'oiseaux disparaît. D'autre part, par un effet migratoire, chaque année cette population voit arriver de l'extérieur 100 nouveaux oiseaux. Notons par u_n la taille de la population des oiseaux en question à l'année n. On note par N la taille de la population au début de l'étude.

(i) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

(ii) Montrer que la suite $v_n = u_n - 2000$ est une suite géométrique de raison $q = 0.95$.

(iii) Que peut-on dire sur l'évolution de la population de cette espèce d'oiseaux ?

Exercice 7. Le taux d'intérêt annuel proposé par une banque est de a. Un client veut emprunter la somme S en euros sur une période de N mois. On note par M le remboursement mensuel. Soit u_n la somme restant due au n-ème mois.

(i) Déterminer u_0 et u_N.

(ii) Donner la relation liant u_{n+1} à u_n.

(iii) On pose $q = 1 + \dfrac{a}{12}$ et $\ell = \dfrac{M}{q-1}$, puis $v_n = u_n - \ell$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison q.

(iv) Exprimer u_n en fonction de q, n, M et S. Donner la contrainte liant M, S et a.

(v) On suppose que $a = 2$ et que $S = 100000$. Le client souhaite rembourser son prêt en 3 ans. Quelle devra être la mensualité ? Donner le coût du crédit.

(vi) On suppose que $a = 2$ et que $S = 100000$. Le client souhaite rembourser son prêt avec des mensualités de 1000 euros. Quelle va être la durée du prêt ? Donner le coût de la dernière mensualité.

Exercice 8.
Une population de taille $N = 10000$ suit la loi suivante. Si l'on note u_n la taille de celle-ci à l'année n, on a

$$u_{n+2} = 0.3u_{n+1} + 0.18u_n.$$

On suppose la population stable à l'issue de la première année.

(i) Trouver deux suites géométriques non nulles (a_n) et (b_n) vérifiant la relation de récurrence du problème.

(ii) *On suppose connu le résulat mathématique suivant : la suite (u_n) est combinaison linéaire des suites (a_n) et (b_n).* Exprimer alors u_n en fonction de n.

(iii) Quel est la taille de la population au bout de 10 ans ? Etudier l'évolution de cette population au cours du temps.

Exercice 9. Soit la suite (u_n) définie par $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{array} \right.$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 10. Soit la suite (u_n) définie par $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{array} \right.$

(i) Montrer que si une suite géométrique $v_n = q^n$ vérifie la relation de récurrence de la suite (u_n) alors la suite $w_n = nq^n$ vérifie également la relation de récurrence en question.

(ii) Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 11.
Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

$$u_n = n^2 + n - 1, \quad u_n = \frac{2}{n^2+1}, \quad u_n = \sqrt{n^2+n}, \quad u_n = \frac{n^2+1}{n+1}, \quad \begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

Exercice 12. Parmi les suites suivantes, lesquelles sont bornées ?

$$u_n = (-1)^n n, \quad u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n, \quad u_n = \frac{n^2}{n+1}, \quad u_n = \frac{n^2}{2n^2+1}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{n+3}$$

Exercice 13. Etudier les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{3}{n+2}, \quad u_n = \frac{n^2-n+3}{n+4}, \quad u_n = \frac{n^3+n^2+3}{2n^3+n+1}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+3}}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n^3+4n^2+2}}{n+\sqrt{2n^3+3}}$$

Exercice 14. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 2$.

(i) Calculer u_1, u_2, u_3.

(ii) Montrer qu'il existe k tel que pour $n \geq k$, il vient $u_n \geq 0$.

(iii) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 15. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1+2\cos(n^2)}{n+1}$, $n \geq 0$.

(i) Montrer que $\dfrac{-1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{3}{n+1}$.

(ii) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 16.
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, et la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

(i) Tracer la courbe $y = \sqrt{x+1}$.
Soient les points du plan $A_n(u_n, 0)$. Placer A_0, A_1, A_2, A_3.

(ii) Montrer que pour tout n, $0 \leq u_n \leq 3$.

(iii) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

(iv) En déduire que la suite (u_n) est convergente. Que vaut la limite ?