

Feuille 8

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes (on précisera les domaines de définition) :

(i) $x \mapsto -1$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 3x - 2$, $x \mapsto 2x^5 - 3x^4 + 5$, $x \mapsto (x - 1)^2(x + 1)$.

(ii) $x \mapsto -\frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$, $x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(iii) $x \mapsto 2e^x$, $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto e^{2x} - e^{3x}$, $x \mapsto \frac{1}{x - 2}$, $x \mapsto \frac{3}{x + 1}$.

(iv) $x \mapsto xe^{x^2}$, $x \mapsto x^2e^{x^3-1}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$, $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(v) $x \mapsto \cos(2x) + 3 \sin x$, $x \mapsto \frac{\sin x}{2 + \cos x}$, $x \mapsto x \cos x^2$, $x \mapsto \cos x \sin^2 x$, $x \mapsto \frac{\sin(\ln x)}{x}$,
 $x \mapsto \tan x$.

Exercice 2. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{(x - 1)(x + 2)}$.

(i) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 2}$.

(ii) En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

Exercice 3. Soit la fonction $f(x) = \frac{x + 2}{(x + 1)^2}$.

(i) Montrer qu'il existe trois nombres réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{(x + 1)^2}$.

(ii) En déduire une primitive de f sur $] - 1, +\infty[$.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes

(i) $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1)dx$, $\int_{-1}^1 (e^{2x} - e^{-x})dx$.

(ii) $\int_0^1 \frac{-2x}{3x^2 + \sqrt{2}}$, $\int_e^2 \frac{1}{x \ln(x^2)}dx$, $\int_0^1 \frac{1}{1 + e^x}dx$.

(iii) $\int_0^1 \frac{x - 2}{(x + 2)^2}dx$ (indication : écrire $\frac{x - 2}{(x + 2)^2}$ sous la forme $\frac{a}{(x + 2)^2} + \frac{b}{x + 2}$).

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes

(i) $\int_0^1 (xe^x)dx$, $\int_0^1 (x^2e^x)dx$.

(ii) $\int_1^2 (\ln x)dx$, $\int_1^2 (x \ln x)dx$.

(iii) $\int_0^{\pi/2} (x \cos x)dx$, $\int_0^{\pi/2} (x \sin x)dx$.

(iv) $\int_0^{\pi/2} (e^x \cos x)dx$, $\int_0^{\pi/2} (e^{-x} \sin x)dx$.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes

(i) $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx$.

(ii) $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}dx$.

(iii) $\int_0^1 \frac{1}{1 + e^x}dx$.

Exercice 7. Soit la fonction $f(x) = x^2 + 1$.

(i) Représenter la courbe C_f d'équation $y = f(x)$.

(ii) Déterminer l'air de l'ensemble D des points du plan délimité par la courbe C_f et les droites $y = 0$, $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice 8. Soient les paraboles d'équations $y = \frac{x^2}{4} - 4$ et $y = -\frac{x^2}{4} + x + 8$.

(i) Représenter ces paraboles.

(ii) Déterminer les points d'intersection de ces paraboles.

(iii) Déterminer l'aire de l'ensemble des points du plan D délimité par ces deux paraboles.

Exercice 9. Soit la fonction $f(x) = e^{-x}$.

- (i) Représenter la courbe C_f d'équation $y = f(x)$.
- (ii) On se fixe un entier $n \geq 1$. Déterminé l'air de l'ensemble D_n des points du plan délimié par la courbe C_f et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = n$.
- (iii) Que se passe t'il quand n tend vers l'infini ?