

Feuille 6

**Exercice 1.** Calculer les premiers termes  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$  des suites suivantes

$$u_n = n^2 + 1 \quad ; \quad u_n = \frac{n^3 - 1}{n + 1} \quad ; \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n^2 + 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = -1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n + 2 \end{cases} \quad ; \quad u_n = 2^n \quad ; \quad u_n = (-1)^n$$

**Exercice 2.** Calculer  $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$ .

**Exercice 3.** Calculer  $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{19} + 3^{20}$ .

**Exercice 4.** Calculer  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024}$ .

**Exercice 5.** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = -1$  et  $u_{n+1} = 2u_n + 3$ . On pose  $v_n = u_n + 3$ .

- (i) Calculer  $u_1, u_2, v_0$  et  $v_1$  et  $v_2$ .
- (ii) Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2.
- (iii) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- (iv) Que vaut la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers l'infini ?

**Exercice 6.** Une étude sur une île fait apparaître l'observation suivante : sur une année, environ 5% d'une certaine population d'oiseaux disparaît. D'autre part, par un effet migratoire, chaque année cette population voit arriver de l'extérieur 100 nouveaux oiseaux. Notons par  $u_n$  la taille de la population des oiseaux en question à l'année  $n$ . On note par  $N$  la taille de la population au début de l'étude.

- (i) Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
- (ii) Montrer que la suite  $v_n = u_n - 2000$  est une suite géométrique de raison  $q = 0.95$ .
- (iii) Que peut-on dire sur l'évolution de la population de cette espèce d'oiseaux ?

**Exercice 7.** Le taux d'intérêt annuel proposé par une banque est de  $a$ . Un client veut emprunter la somme  $S$  en euros sur une période de  $N$  mois. On note par  $M$  le remboursement mensuel. Soit  $u_n$  la somme restant due au  $n$ -ème mois.

- (i) Déterminer  $u_0$  et  $u_N$ .
- (ii) Donner la relation liant  $u_{n+1}$  à  $u_n$ .
- (iii) On pose  $q = 1 + \frac{a}{12}$  et  $\ell = \frac{M}{q-1}$ , puis  $v_n = u_n - \ell$ . Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$ .
- (iv) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $q$ ,  $n$ ,  $M$  et  $S$ . Donner la contrainte liant  $M$ ,  $S$  et  $a$ .
- (v) On suppose que  $a = 2$  et que  $S = 100000$ . Le client souhaite rembourser son prêt en 3 ans. Quelle devra être la mensualité ? Donner le coût du crédit.
- (vi) On suppose que  $a = 2$  et que  $S = 100000$ . Le client souhaite rembourser son prêt avec des mensualités de 1000 euros. Quelle va être la durée du prêt ? Donner le coût de la dernière mensualité.

**Exercice 8.**

Une population de taille  $N = 10000$  suit la loi suivante. Si l'on note  $u_n$  la taille de celle-ci à l'année  $n$ , on a

$$u_{n+2} = 0.3u_{n+1} + 0.18u_n.$$

On suppose la population stable à l'issue de la première année.

- (i) Trouver deux suites géométriques non nulles  $(a_n)$  et  $(b_n)$  vérifiant la relation de récurrence du problème.
- (ii) *On suppose connu le résultat mathématique suivant : la suite  $(u_n)$  est combinaison linéaire des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .* Exprimer alors  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- (iii) Quel est la taille de la population au bout de 10 ans ? Etudier l'évolution de cette population au cours du temps.

**Exercice 9.** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 10.** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

- (i) Montrer que si une suite géométrique  $v_n = q^n$  vérifie la relation de récurrence de la suite  $(u_n)$  alors la suite  $w_n = nq^n$  vérifie également la relation de récurrence en question.

(ii) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 11.**

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

$$u_n = n^2 + n - 1, \quad u_n = \frac{2}{n^2 + 1}, \quad u_n = \sqrt{n^2 + n}, \quad u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}, \quad \begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

**Exercice 12.** Parmi les suites suivantes, lesquelles sont bornées ?

$$u_n = (-1)^n n, \quad u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n, \quad u_n = \frac{n^2}{n + 1}, \quad u_n = \frac{n^2}{2n^2 + 1}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n + 2}}{n + 3}$$

**Exercice 13.** Étudier les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{3}{n + 2}, \quad u_n = \frac{n^2 - n + 3}{n + 4}, \quad u_n = \frac{n^3 + n^2 + 3}{2n^3 + n + 1}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 3}}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n^3 + 4n^2 + 2}}{n + \sqrt{2n^3 + 3}}$$