

Feuille 5

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera les domaines de dérivabilité) :

(i) $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$, $x \mapsto \ln(\sqrt{x} - 1)$, $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $x \mapsto \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$, $x \mapsto x \ln x$.

(ii) $x \mapsto \exp(x^2)$, $x \mapsto \exp(\sqrt{x} + 1/x)$, $x \mapsto (\sin x) \exp(\cos x)$, $x \mapsto \frac{\exp(x) - 2}{\exp(x) - 1}$.

Exercice 2. Soit la fonction $f(x) = x^2 \exp(-x)$.

- (i) Etudier les variations de la fonction f .
- (ii) Tracer la courbe représentative \mathcal{C}_f de f .
- (iii) Reprendre l'exercice avec $f(x) = x \ln |x|$.

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- (i) $2 \ln(x) + 5 = 0$.
- (ii) $2^x = 25$.
- (iii) $\ln(x^2 - 1) = \ln 3 + 4 \ln 2$.
- (iv) $\ln(x + 3) + \ln(x + 2) = \ln(x + 11)$.
- (v) $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 11)$.
- (vi) $\ln(x + 1) + \ln(x - 1) = -2$.
- (vii) $\ln(2x + 1) = \ln(x + 3) + 1$.
- (viii) $\ln(1 - 5x) - \ln(x + 1) = -1$.

Exercice 4. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

(i) $(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 = 0.$

(ii) $(\ln x)^2 - \ln(x^2) - 3 = 0.$

(iii) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0.$

(iv) $e^{2x} - 3 + e^{-2x} = 0.$

Exercice 5. Résoudre dans \mathbb{R} les inégalités suivantes :

(i) $2 \ln(x) - 7 \geq 0.$

(ii) $2^x \leq 7.$

(iii) $0.2^x \leq 7.$

(iv) $\ln(x + 1) - \ln(x - 1) \geq 1.$

(v) $\ln(x - 2) + 1 \geq \ln(2x + 1).$

Exercice 6. Résoudre dans \mathbb{R}

(i)
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ \ln x + \ln y = 6 \end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ \ln x + \ln y = 2 \ln 2 + \ln 3 \end{cases}$$