Licence Sciences fondamentales et Applications 1ère année - 2024/25

Parcours aménagé

Feuille 11

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes (on précisera les domaines de définition) :

(i) $x \mapsto -1,\ \ x \mapsto x^2,\ \ x \mapsto 3x-2,\ \ x \mapsto 2x^5 - 3x^4 + 5,\ \ x \mapsto (x-1)^2(x+1)$.

(ii) $x \mapsto -\frac{1}{x},\ \ x \mapsto \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3},\ \ x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(iii) $x \mapsto 2e^x$, $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto e^{2x} - e^{3x}$, $x \mapsto \frac{1}{x-2}$, $x \mapsto \frac{3}{x+1}$.

(iv) $x \mapsto xe^{x^2}$, $x \mapsto x^2 e^{x^3-1}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$, $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$, $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(v) $x \mapsto \cos(2x) + 3\sin x$, $x \mapsto \frac{\sin x}{2+\cos x}$, $x \mapsto x\cos x^2$, $x \mapsto \cos x \sin^2 x$, $x \mapsto \frac{\sin(\ln x)}{x}$, $x \mapsto \tan x$.

Exercice 2. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$.

(i) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$.

(ii) En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

Exercice 3. Soit la fonction $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$.

(i) Montrer qu'il existe trois nombres réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

(ii) En déduire une primitive de f sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes

(i) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - 3x + 1)dx$, $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^{2x} - e^{-x})dx$.

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-2x}{3x^2+\sqrt{2}}$, $\displaystyle\int_e^2 \frac{1}{x\ln(x^2)}dx$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{(x+2)^2}dx$ (indication : écrire $\displaystyle\frac{x-2}{(x+2)^2}$ sous la forme $\displaystyle\frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{x+2}$).

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes

(i) $\displaystyle\int_0^1 (xe^x)dx$, $\displaystyle\int_0^1 (x^2e^x)dx$.

(ii) $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)dx$, $\displaystyle\int_1^2 (x\ln x)dx$.

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x\cos x)dx$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x\sin x)dx$.

(iv) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (e^x\cos x)dx$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (e^{-x}\sin x)dx$.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes

(i) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(ii) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.

Exercice 7. Soit la fonction $f(x) = x^2 + 1$.

(i) Représenter la courbe C_f d'équation $y = f(x)$.

(ii) Déterminer l'air de l'ensemble D des points du plan délimité par la courbe C_f et les droites $y = 0$, $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice 8. Soient les paraboles d'équations $y = \dfrac{x^2}{4} - 4$ et $y = -\dfrac{x^2}{4} + x + 8$.

(i) Représenter ces paraboles.

(ii) Déterminer les points d'intersection de ces paraboles.

(iii) Déterminer l'aire de l'ensemble des points du plan D délimité par ces deux paraboles.

Exercice 9. Soit la fonction $f(x) = e^{-x}$.

(i) Représenter la courbe C_f d'équation $y = f(x)$.

(ii) On se fixe un entier $n \geq 1$. Déterminé l'air de l'ensemble D_n des points du plan délimié par la courbe C_f et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = n$.

(iii) Que se passe t'il quand n tend vers l'infini ?