Licence Sciences fondamentales et Applications 1ère année - 2024/25

Parcours aménagé

Feuille 10

Pour l'ensemble de ces exercices, on considère un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 1. On considère les points $A(1,2)$, $B(4,5)$, $C(6,3)$, et $D(2,0)$.

(i) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, et $\overrightarrow{AC}$.

(ii) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

(iii) Vérifier si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

(iv) Déterminer une condition sur un point $E(x,y)$ pour que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Exercice 2.
Soient les points $A(1,2)$, $B(3,6)$, et $C(4,-1)$.

(i) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(ii) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(iii) Déterminer la norme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(iv) En déduire l'angle θ entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 3.

(i) Montrer l'égalité $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2\right)$.

(ii) Soit un triangle ABC. En déduire la formule

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\hat{A}),$$

où $\hat{A}$ est l'angle en A.

(iii) Soient les points $A(0,0)$, $B(2,1)$ et $C(1,3)$. Déterminer les trois angles du triangle ABC.

Exercice 4. Soient les points $A(2,3)$, $B(-1,4)$, et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x-2y+3=0$.

(i) Calculer la distance entre les points A et B.

(ii) Donner un vecteur directeur et un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$.

(iii) Trouver les coordonnées du projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

(iv) Déterminer les coordonnées du point C sur $\mathcal{D}$ tel que AC soit minimal.

Exercice 5. Soient les points $A(2,-1)$, $B(-3,4)$, et $C(1,5)$ et soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

(i) Montrer que le centre du cercle $\mathcal{C}$ est équidistant des trois sommets du triangle.

(ii) Calculer l'équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

(iii) Calculer les coordonnées du centre de $\mathcal{C}$ et son rayon.

(iv) Donner une équation de $\mathcal{C}$.

Exercice 6. On donne :

- la droite $\mathcal{D} : y = 2x - 3$,
- le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

(i) Montrer que l'équation du cercle peut s'écrire sous la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Préciser le centre et le rayon du cercle.

(ii) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$.

(iii) Vérifier si le point $P(3,3)$ appartient à $\mathcal{C}$. Si oui, calculer la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

Exercice 7. On considère le triangle ABC défini par :

$$A(1,2), \quad B(5,6), \quad C(3,-2).$$

(i) Calculer les longueurs des côtés AB, BC, et CA. Le triangle ABC est-il isocèle ?

(ii) Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

(iii) Trouver les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

(iv) Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 8. On donne les points :

$$A(1,1), \quad B(4,3), \quad C(6,1).$$

(i) Déterminer D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

(ii) Démontrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

(iii) Calculer les coordonnées du centre de symétrie du parallélogramme $ABCD$.

(iv) Si $ABCD$ est une figure modifiée par une homothétie de centre $O(0,0)$ et de rapport $k=2$, donner les nouvelles coordonnées des sommets.

Exercice 9.
On considère les points $A(1,2)$, $B(4,5)$, et $C(6,2)$.

(i) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

(ii) Calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

(iii) Vérifier si le point $D(3,4)$ appartient à la droite passant par A et B.

(iv) Déterminer une équation paramétrique de la droite AC et une équation cartésienne de la droite BC.

Exercice 10. Soient les points $U(a,b)$ et $U'(a',b')$. Déterminer les points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{MU} \cdot \overrightarrow{MU'} = 0$. Étudier la réciproque.