Licence Sciences fondamentales 1ère anné, Année 2018-2019

Analyse   Groupe TD 1

Contrôle 1

Exercice 1. Simplifier l'expression

$$A = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right).$$

Exercice 2. Résoudre l'équation

$$-x + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}.$$

Exercice 3. Résoudre l'inégalité

$$\frac{2x+1}{x+3} \leq x + 1.$$

Exercice 4. Calculer $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^{20}}$.

Exercice 5. Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

(i) Pour quelle valeur de u_0 la suite u_n est-elle constante ?

(ii) On pose $v_n = u_n + 2$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique (on précisera la raison).

(iii) On suppose que $u_0 = -1$. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 6. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

(i) Justifier que u_n est toujours bien défini puis que $u_n > 0$.

(ii) Calculer et représenter u_0, u_1, u_2, u_3.

(iii) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

(iv) En déduire que la suite (u_n) est majorée (on donnera un majorant).

Licence Sciences fondamentales 1ère anné, Année 2018-2019

Analyse Groupe TD 1

Contrôle 2

Exercice 1. Simplifier l'expression
$$A = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 2. Résoudre l'équation
$$-2x + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{5}.$$

Exercice 3. Résoudre l'inégalité
$$\frac{x+1}{x+3} \leq x - 1.$$

Exercice 4. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3+2x-2$. On note par C_f la courbe représentative de f.

(i) Déterminer le domaine de définition de f.

(ii) Calculer $f'(x)$. Quel est le sens de variation de f ?

(iii) Donner l'équation de la tangente en C_f au point d'abscisse $x = 1$.

(iv) Déterminer les points de C_f en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

(v) Montrer qu'il n'existe pas de tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = ax$ dès que $a < 2$.

Exercice 5. On veut tracer la courbe représentative C_g de la fonction $g : x \mapsto -\sqrt{x} + 2$.
Pour ce faire, on va passer par la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

(i) Calculer $f(0)$, $f(0.5)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, puis tracer la courbe C_f d'équation $y = f(x)$.

(ii) Expliquer ensuite comment obtenir, à partir de la courbe C_f, la courbe C' d'équation $y = -\sqrt{x}$.

(iii) Enfin, à partir de la courbe C', en déduire la représentation de la courbe C_g.

Licence Sciences fondamentales 1ère anné, Année 2018-2019

Analyse Groupe TD 1

Contrôle 3

Exercice 1. Résoudre l'équation

$$-3x + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}x - \frac{1}{3}.$$

Exercice 2. Résoudre l'inégalité

$$\frac{x^2 - 9x + 14}{x + 1} < 0.$$

Exercice 3. Résoudre $\ln(2x + 1) = 2$.

Exercice 4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes

(i) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

(ii) $g(x) = \sqrt{x}\cos(x)$.

(iii) $h(x) = \dfrac{x \ln x}{x - \ln x}$. (Simplifier autant que possible.)

Exercice 5. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

(i) Donner le domaine de définition D_f de f.

(ii) Calculer $f'(x)$.

(iii) Déterminer les asymptotes verticales.

(iv) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

(v) Dresser le tableau de variation de f.

(vi) Montrer que $f(-x) = f(x)$. Que peut-on dire sur $\mathcal{C}_f$?

(vii) Après avoir calculé $f(0)$, $f(2)$ et $f(4)$, tracer sommairement $\mathcal{C}_f$.

(viii) Suivant la paramètre réel k, déterminer à partir de $\mathcal{C}_f$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$. Retrouver ce résultat par le calcul.

Licence Sciences fondamentales 1ère anné, Année 2018-2019

Analyse Groupe TD 1

Contrôle 4

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$.

Exercice 2.

(i) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

(ii) Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx$.

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$.

Exercice 4. Ecrire sous la forme "$a+ib$" le nombre complexe $i^5 + i^7(i+1)^2$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(i-1)(i+z) - i = -2z + i$. (Mettre la solution sous la forme "$a+ib$".)

Exercice 6.

(i) Développer $(3-2i)^2$.

(ii) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z - 1 + 3i = 0$.
