Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé ou dans une base orthonormée.

Exercice 1.
Dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, considérons les vecteurs suivants :

$$\vec{U}\begin{pmatrix}-2\\3\\\alpha\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{V}\begin{pmatrix}6\\-\beta\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{W}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}},$$

où α et β sont des constantes à déterminer. On exprimera les résultats en fonction de $\sqrt{14}$.

(1) Pour quelles valeurs de α et β, les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont-ils colinéaires ?

(2) Exprimer les coordonnées des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $(\vec{U}+\vec{V})$ et $(\vec{U}-\vec{V})$ dans la base $\mathcal{B}$.

(3) Calculer les modules des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $(\vec{U}+\vec{V})$ et $(\vec{U}-\vec{V})$.
L'inégalité triangulaire, donnée par $\|\vec{U}+\vec{V}\| \leqslant \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|$, est-elle vérifiée ?

(4) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{X}$ vérifiant la relation vectorielle :
$$2\vec{U} + \frac{1}{3}\vec{V} - \vec{W} + \vec{X} = \vec{0}.$$
En déduire le vecteur unitaire $\vec{x}$ porté par $\vec{X}$.

Exercice 2.

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Montrer de manière analytique l'égalité suivante :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$
2. Soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$. En déduire l'égalité suivante :
$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

Exercice 3.
Montrer que deux vecteurs dont la somme est perpendiculaire à la différence ont la même norme.

Exercice 4.
Soit la base orthonormée $\mathcal{B}(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. Soient les deux vecteurs :
$$\vec{X} = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(2\vec{e_x} - \vec{e_y} + \vec{e_z}\right) ; \; \vec{Y} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\vec{e_x} - \vec{e_y} + \vec{e_z}\right)$$

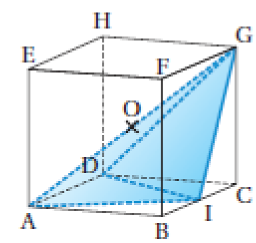
1. Vérifier que $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont orthogonaux.
2. Vérifier que $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont des vecteurs unitaires.

Exercice 5.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On donne trois points $A(2;1;1)$, $B(6;6;3)$ et $C(2;4;3)$. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1;-2;3)$ est normal au plan (ABC).

Exercice 6.

$ABCDEFGH$ est un cube de centre O. I est le milieu de $[BC]$. On munit l'espace du repère orthonormé $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.



1. Déterminer les coordonnées des points A, G, I et O.
2. Calculer $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DG}$. En déduire la nature du triangle ADG et calculer son aire.
3. Calculer $\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{DG}$. En déduire que la droite (IO) est orthogonale au plan (ADG).
4. Calculer le volume du tétraèdre $ADGI$.

Exercice 7.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par le point $A(3;1;2)$ et un vecteur normal $\vec{n}(3;1;-2)$.
2. Les points $B(4;-5;-2)$, $C(0;4;1)$ et $D(2;2;1)$ appartiennent- ils au plan $\mathcal{P}$?