Exercice 1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\,; \qquad z_2 = \frac{4-3\,\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}\,; \qquad z_3 = \frac{(2+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{4\,\mathrm{i}}\,;$$

$$z_4 = \frac{3-i}{(1+i)(1+2i)}\,; \qquad z_5 = \frac{i(2-3i)}{(1-2i)^2}.$$

Exercice 2. Résoudre le système suivant, d'inconnues complexes x et y :

$$\begin{cases} (1+\mathrm{i})x & - & 2\mathrm{i}y & = & 2 \\ x & - & (\mathrm{i}+1)y & = & 1-\mathrm{i} \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Écrire j sous forme trigonométrique ou exponentielle.
2. Calculer j^2, j^3, $\bar{\mathrm{j}}$, $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2$.

Exercice 4. Expliciter les formes algébrique et trigonométrique du nombre complexe $(1+i)^{16}$.

Exercice 5. Soit les nombres complexes : $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$ et $z_2 = \dfrac{\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}\sqrt{3}-2}$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique ou exponentielle.
2. Calculer z_1+z_2 ; $z_1 \times z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $(z_1)^6 \times (z_2)^{12}$; $\dfrac{(z_1)^8}{(z_2)^3}$.

Exercice 6. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1+\mathrm{i}$;
2. $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3. $z_3 = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

Exercice 7.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^4}$;
2. Déterminer le module et l'argument de z ;
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 8. En utilisant les formules de De Moivre, exprimer $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

Exercice 9. Montrer que, pour tout réel $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque,

$$\tan(\theta) = -i\,\frac{1-e^{-2i\theta}}{1+e^{-2i\theta}}.$$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 - 2z + 4 = 0$;
2. $z^2 - 8z + 25 = 0$;
3. $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0$.

Exercice 11. Utilisation des nombres complexes en électricité.
Prenons un dipôle traversé par un courant alternatif sinusoïdal

— d'intensité $I(t) = I_{max}\sin(wt + \phi_1)$.
— de tension à ses bornes $U(t) = U_{max}\sin(wt + \phi_2)$.

Si $\phi_1 \neq \phi_2$, il y a un déphasage.

Pour définir l'impédance du dipôle, on associe à $I(t)$ et $U(t)$ les deux nombres complexes $\underline{\mathrm{I}}(t) = I_{max}(\cos(wt + \phi_1) + \mathrm{i}\sin(wt + \phi_1))$ et $\underline{\mathrm{U}}(t) = U_{max}(\cos(wt + \phi_2) + \mathrm{i}\sin(wt + \phi_2))$. $I(t)$ et $U(t)$, qui sont des quantités réelles, sont alors les parties imaginaires des deux nombres complexes $\underline{\mathrm{I}}(t)$ et $\underline{\mathrm{U}}(t)$.

L'impédance d'un dipôle linéaire passif de bornes A et B en régime sinusoïdal est le quotient de la tension entre ses bornes et de l'intensité du courant qui le traverse : $\underline{\mathrm{Z}} = \dfrac{\underline{\mathrm{U}}}{\underline{\mathrm{I}}}$.

1. Donner le module et un argument de $\underline{\mathrm{I}}$, le module et un argument de $\underline{\mathrm{U}}$.
2. En déduire le module et un argument de $\underline{\mathrm{Z}}$ et écrire $\underline{\mathrm{Z}}$ sous forme trigonométrique.
3. Calculer sous forme trigonométrique l'impédance du dipôle dans le cas où :
   $I(t) = 0,2\sin(100\pi t + \dfrac{\pi}{3})$ et $U(t) = 3\sin(100\pi t + \dfrac{\pi}{4})$.