Exercice 1.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 2x$, pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Tracer les représentations graphiques de différentes solutions.

Exercice 2.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = 0$, dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la dérivée de y.
2. Tracer les représentations graphiques de différentes solutions.
3. Déterminer la solution f qui vérifie $f(0) = 1$.

Exercice 3.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$, dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la dérivée de y.
2. Tracer les représentations graphiques de différentes solutions.
3. Déterminer la solution f qui vérifie $f(\ln 4) = 1$.

Exercice 4.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{1}{3}y = 0$, dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la dérivée de y.
2. Tracer les représentations graphiques de différentes solutions.
3. Déterminer la solution f qui vérifie $f'(0) = \frac{1}{3}$.

Exercice 5.

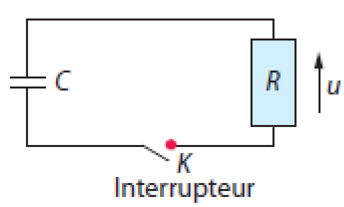
Lors de la production industrielle de pénicilline G par la moisissure *Penicilium Chrysogenum*, l'évolution de la biomasse de moisissure dans le fermenteur est suivie par des déterminations de masses sèches.

On admet que l'évolution de la quantité X de biomasse, en grammes par litre, sur un intervalle de temps donné est solution de l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}} = kX$, où k est une constante réelle strictement positive, et où t est le temps exprimé en heures.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Exprimer X en fonction de t, sachant que $X(0) = 2,7$ et $X(20) = 24$.

Exercice 6.

Un condensateur de capacité C, initialement chargé à une tension u_0=10 volts, se décharge à partir de l'instant $t_0 = 0$ à travers un circuit de résistance R. Pour $t \geqslant 0$, on sait que la tension u est une fonction du temps t, exprimé en secondes, solution de l'équation différentielle (E) : $RCu'(t) + u(t) = 0$.



On prend $C = 15.10^{-5}$ farads et $R = 2.10^4$ ohms.

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (E).
   (b) déterminer la fonction u solution de (E) vérifiant la condition initiale : $u(t_0) = u_0 = 10$ volts.

2. Déterminer à partir de quel instant t_1 la tension $u(t)$ vérifiera $u(t) \leqslant \frac{1}{10}u_0$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction u entre les instants t_0 et t_1.

Exercice 7.
La modélisation d'un phénomène physique conduit à l'équation différentielle

$$(E) : 2y' + y = \frac{1}{2},$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' est la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution φ de (E) vérifiant $\varphi(0) = 0$.

Exercice 8.

A l'instant $t = 0$, une bille est lâchée à la surface d'une colonne de liquide.
On note $v(t)$ la vitesse instantanée de cette bille, exprimée en $m.s^{-1}$.
On admet que la fonction v est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et qu'elle est solution de l'équation de l'équation différentielle

$$(E) : y' = 140y = 5,88.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Parmi les fonctions obtenues à la question précédente, démontrer que celle, notée v, qui s'annule pour $t = 0$, est définie par : $v(t) = 0,052(1 - e^{-140t})$.
3. *Deux utilisations de l'expression obtenue pour $v(t)$.*
   (a) Démontrer que la vitesse de la bille atteint une valeur limite ℓ lorsque $t \to +\infty$.
   (b) A quel instant t la bille atteint-elle 95 % de sa vitesse limite ?

Exercice 9.

La vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et l'air ambiant. En désignant par $q(t)$ la température du corps à l'instant t exprimé en secondes, on admet que la fonction $t \mapsto \theta(t)$ est solution de l'équation différentielle (E) :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = -k(\theta - \theta_1),$$

où k est une constante strictement positive et θ_1 la température de l'air ambiant.

1. Dans ce qui suit, C est une constante quelconque. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :
   (a) $t \mapsto Ce^{-kt} + \frac{\theta_1}{k}$;
   (b) $t \mapsto Ce^{-kt}$;
   (c) $t \mapsto Ce^{-kt} + \theta_1$.
2. La solution de l'équation différentielle (E) satisfaisant à la condition $\theta(0) = \theta_0$ est :

   (a) $t \mapsto \theta_0 e^{-kt} + \theta_1$;
   (b) $t \mapsto (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt} + \theta_1$;
   (c) $t \mapsto (\theta_0 - \theta_1)e^{-kt} + \theta_1$.

3. Au bout de 5 minutes, θ vaut 60°C. La valeur de k, arrondie à $10^{\breve{}5}$, est :
   (a) $7,43 \times 10^{-3}$;
   (b) $-7,43 \times 10^{-3}$;
   (c) $7,4 \times 10^{-4}$;

Exercice 10. Soit l'équation différentielle $(E) y' = y + x - 3$.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + 2$ est une solution de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 11. *Terminale : Spécialité mathématiques - Incontournables, classiques, grand oral : 44 exercices progressifs corrigés et commentés-F.Vinsu. Editions ellipses*
On considère l'équation différentielle $(E) : y' - \dfrac{1}{2}y = \cos(x)$.

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation homogène associée (E_0).
2. Soient a et b deux réels et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\cos(x)+b\sin(x)$. Déterminer les valeurs de a et b de sorte que la fonction g soit solution de (E).
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition $f(0) = 1$.
5. (a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \dfrac{1}{5}\left(7e^{\frac{1}{2}x} - 6\right)$.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
   (c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Exercice 12. Résoudre l'équation différentielle $y' - \sin(x).y = 0$.

Exercice 13. On cherche à résoudre l'équation différentielle $(E) y' - (x+1)(y+1) = 0$, en imposant la condition initiale $y(0) = 1$.

1. Écrire et résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E).
2. Chercher une solution particulière constante de (E).
3. Résoudre (E).