

# INFORMATIQUE

2024 - 2025

## Algorithmes sur les Graphes et Combinatoire

Laurent PHILIPPE

SUP<sup>F</sup><sub>C</sub>

---

# Algorithmique sur les Graphes et Combinatoire

MASTERS INFORMATIQUE DVL / I2A / ISL  
1ÈRE ANNÉE

---

## Chapitre II - Exercices - Programmation Linéaire



Centre de télé enseignement  
Filière Informatique  
Domaine Universitaire de la Bouloie  
25030 Besançon Cedex (France)

# 1 Résolution de programmes linéaires

## **Exercice 1 : Fabrication de yaourts**

Un fabricant produit deux types de yaourts à la fraise, à partir de fraises, de lait et de sucre : un type normal et un type allégé. La réalisation d'un lot de yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières en kg :

	Normal	Allégé
Fraises	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

TABLE 1 – Proportion d'ingrédients des yaourts

Le fabricant dispose de 800 kg de fraises, 700 kg de lait et 300 kg de sucre. La vente de 1 kg de yaourts normaux et allégés rapporte respectivement 4€ et 5€. Le fabricant cherche à maximiser le profit qu'il peut faire à partir de ces quantités.

**Question 1.1 :** *Formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire. en respectant d'abord la forme canonique et puis standard. Expliquer les différentes étapes de votre raisonnement.*

## **Exercice 2 : Sites internet**

Le directeur d'une entreprise de développement souhaite rentabiliser au mieux son chiffre d'affaire du mois. Il a 10 commandes de site internet à réaliser dans le mois sachant que chacun des sites peut prendre trois formes plus ou moins élaborées à partir d'un canevas initial sur lesquelles il fait intervenir un graphiste et un développeur. Le temps mensuel consacré à ces commandes est de 136 heures pour le graphiste et de 160 pour le développeur.

Dans la première forme demande 12 heures de travail au graphiste et 24 heures de travail au développeur. La seconde demande 16 heures au graphiste et 4 au développeur et la troisième 4 heures au graphiste et 8 heures au développeur. En fonction de la forme du site le prix varie. Le directeur facture ainsi 500€ pour la première forme, 300€ pour la deuxième et 200€ pour la troisième.

**Question 2.1 :** *Formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire. Expliquer les différentes étapes de votre raisonnement.*

**Question 2.2 :** *Montrer qu'il est possible de réduire la dimension du problème. Le résoudre graphiquement. Justifier.*

**Question 2.3 :** *Faire la résolution du problème en utilisant l'algorithme du simplexe.*

## **Exercice 3 : Réécriture de programme linéaire**

Soit le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{minimiser} & 2x_1 + 7x_2 & \\ \text{avec les contraintes} & x_1 & = 7 \\ & 3x_1 + x_2 & \geq 24 \\ & x_2 & \geq 0 \\ & x_3 & \leq 0 \end{array} \right.$$

**Question 3.1 :** Convertir ce programme linéaire dans sa forme standard.

**Question 3.2 :** Quelles sont les variables de base et les variables hors-base ?

**Question 3.3 :** Donner l'état des variables  $N$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $c$  et  $v$  utiles au bon déroulement de l'algorithme du simplexe.

#### **Exercice 4 : Aliment pour bétail**

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge, arachide, et sésame. L'aliment ainsi conditionné doit comporter au moins 22% de protéines et 3,6% de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indiqué dans le tableau 2 les pourcentages de protéines et de graisses contenues, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne des produits bruts.

produit brut	orge	arachide	sésame	% requis
% de protéines	12	52	42	22
% de graisses	2	2	10	3,6
coût par tonne	25	41	39	

TABLE 2 – Composition et coût des composants des aliments

On note  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) la fraction de tonne de produit brut  $j$  contenu dans une tonne d'aliment.

**Question 4.1 :** Formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire en respectant d'abord la forme canonique et puis standard. Expliquer les différentes étapes de votre raisonnement.

**Question 4.2 :** Montrer qu'il est possible de réduire la dimension du problème. Le résoudre graphiquement. Justifier.

**Question 4.3 :** Faire la résolution du problème en utilisant l'algorithme du simplexe.

#### **Exercice 5 : Minimisation**

Soit le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{minimiser} & x_1 + x_2 & \\ \text{avec les contraintes} & 4x_1 - x_2 \leq 8 & \\ & 2x_1 + x_2 \leq 20 & \\ & 5x_1 - 2x_2 \geq -2 & \\ & 2x_1 + x_1 \geq 10 & \\ \text{et } x_1, x_2 & \geq 0 & \end{array} \right.$$

**Question 5.1 :** *Résoudre graphiquement le problème*

Nous proposons dans cet exercice de réaliser une minimisation plutôt qu'une maximisation. Comme nous n'avons pas vu comment le faire avec la méthode du simplexe, nous nous contenterons d'une résolution graphique.

## Correction Exercice 1 : Fabrication de yaourts

**Solution question 1.1 :** *Formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire. en respectant d'abord la forme canonique et puis standard. Expliquer les différentes étapes de votre raisonnement.*

Pour formuler le problème sous la forme canonique il faut d'abord formuler le problème, c'est-à-dire définir les variables, la fonction objectif et les contraintes.

D'après l'énoncé les valeurs à déterminer sont les quantités de yaourts normaux et allégés. Nous posons donc  $x_1$  le nombre de yaourt normaux et  $x_2$  le nombre de yaourts allégés.

Pour la fonction objectif, l'énoncé dit clairement que nous souhaitons maximiser le profit du fabricant. La vente de 1 kg de yaourt normal rapporte 4€, donc le profit réalisé avec les yaourts normaux sera de  $4x_1$ . La vente de 1 kg de yaourt normalalléger rapporte 5€, donc le profit réalisé avec les yaourts normaux sera de  $5x_2$  et la fonction objectif est :  $4x_1 + 5x_2$  et nous cherchons le nombre de kg de yaourt de chaque type produire pour que cette valeur soit maximale.

Pour fabriquer les yaourts le fabricant dispose de 800 kg de fraises. Il en utilise 2 pour chaque kg de yaourt normal et 1 pour chaque kilo de yaourts allégés. Nous obtenons la contrainte :

$$2x_1 + x_2 \leq 800$$

Pour le lait la contrainte est :

$$x_1 + 2x_2 \leq 700$$

Et pour le sucre :

$$x_2 \leq 300$$

Nous obtenons le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{maximiser} & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{avec les contraintes} & \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 800 \\ x_1 + 2x_2 \leq 700 \\ x_2 \leq 300 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \end{array} \right.$$

Il est déjà sous forme canonique. En voici la forme standard :

$$\text{forme standard} \left\{ \begin{array}{l} z = 4x_1 + 5x_2 \\ x_4 = 800 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 700 - x_1 - 2x_2 \\ x_6 = 300 - x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array} \right.$$

## Correction Exercice 2 : Sites internet

**Solution question 2.1 :** *Formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire en respectant d'abord la forme canonique et puis standard. Expliquer les différentes étapes de votre raisonnement.*

Pour formuler le problème sous la forme canonique il faut d'abord formuler le problème, c'est-à-dire définir les variables, la fonction objectif et les contraintes.

D'après l'énoncé les valeurs à déterminer sont les types de sites internet qu'il doit réaliser pour avoir les meilleurs revenus. Nous posons donc  $x_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) pour le nombre de sites internet de type  $i$ .

Pour la fonction objectif, l'énoncé dit clairement que nous souhaitons maximiser le revenu de l'entreprise. Les sites de type 1 valent 500€, de type 2 valent 300€ et de type 3 valent 200€. La fonction objectif est : donc  $500x_1 + 300x_2 + 200x_3$  et nous cherchons le nombre de sites de chaque type produire pour que cette valeur soit maximale.

L'entreprise doit faire 10 sites, donc la somme des  $x_i$  vaut 10. Ensuite nous utilisons les disponibilités horaires du graphiste et du développeur pour définir les contraintes liées au temps. Le graphiste travaille 136 heures dans le mois. Comme il lui faut 12 heures de travail sur un site de type 1, 16 sur un site de type 2 et 4 sur un site de type 3, nous obtenons la contrainte :

$$12x_1 + 16x_2 + 4x_3 \leq 136$$

Pour finir le développeur travaille 160 heures dans le mois. Comme il lui faut 24 heures de travail sur un site de type 1, 4 sur un site de type 2 et 8 sur un site de type 3, nous obtenons la contrainte :

$$24x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 160$$

Nous obtenons la formulation du problème sous la forme d'un programme linéaire :

$$\text{programme linéaire} \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximiser} & 500x_1 + 300x_2 + 200x_3 \\ \text{avec les contraintes} & \begin{array}{rcl} 12x_1 + 16x_2 + 4x_3 & \leq & 136 \\ 24x_1 + 4x_2 + 8x_3 & \leq & 160 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 10 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \end{array} \right.$$

$$\text{forme canonique} \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximiser} & 500x_1 + 300x_2 + 200x_3 \\ \text{avec les contraintes} & \begin{array}{rcl} 12x_1 + 16x_2 + 4x_3 & \leq & 136 \\ 24x_1 + 4x_2 + 8x_3 & \leq & 160 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 10 \\ -x_1 - x_2 - x_3 & \leq & -10 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \end{array} \right.$$

$$\text{forme standard} \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 500x_1 + 300x_2 + 200x_3 \\ x_4 & = & 136 - 12x_1 - 16x_2 - 4x_3 \\ x_5 & = & 160 - 24x_1 - 4x_2 - 8x_3 \\ x_6 & = & 10 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_7 & = & -10 + x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

**Solution question 2.2 :** *Montrer qu'il est possible de réduire la dimension du problème. Le résoudre graphiquement. Justifier.*

Il est possible de réduire le nombre de variables du programme linéaire précédent grâce à la 3<sup>ème</sup> équation.  $x_3$  est tiré de cette équation :

$$x_3 = 10 - x_1 - x_2$$

Puis il est remplacé dans les autres équations du programme linéaire précédent. Nous obtenons alors le programme linéaire suivant à 2 variables.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser} \quad 300x_1 + 100x_2 + 2000 \\ \text{avec les contraintes} \quad \begin{array}{l} 8x_1 + 12x_2 \leq 96 \\ 16x_1 - 4x_2 \leq 80 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \end{array} \right.$$

Qui peut se simplifier en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser} \quad 3x_1 + x_2 + 20 \\ \text{avec les contraintes} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 4x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \end{array} \right.$$

Il est alors possible de résoudre graphiquement, comme cela est illustré par la figure 1. Dans cette figure on pose  $x_1 = x$  et  $x_2 = y$  puis on trace les droites correspondant aux contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 3/2x + 8 \\ y = 4x - 20 \end{array} \right.$$

Les solutions du problème sont contenues dans le simplexe défini par les 4 points (0,0), (8,0), (6, 4) et (5, 0) (zone hachurée sur la figure). La recherche de la solution optimale nous conduit à déplacer la courbe  $y = -3x + b$ . L'expression à maximiser a la plus grande valeur au niveau de l'intersection de la droite  $2/3x + y - 8 = 0$  avec la droite  $4x - y - 20 = 0$ , c'est à dire au point (6,4).

Ainsi la solution de ce problème est  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 4$  et  $x_3 = 0$  avec une valeur de 4200 pour le chiffre d'affaires.

**Solution question 2.3 :** *Faire la résolution du problème en utilisant l'algorithme du simplexe.*

Pour répondre à cette questions nous repartons de la forme simplifiée du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser} \quad 3x_1 + x_2 + 20 \\ \text{avec les contraintes} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 4x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \end{array} \right.$$



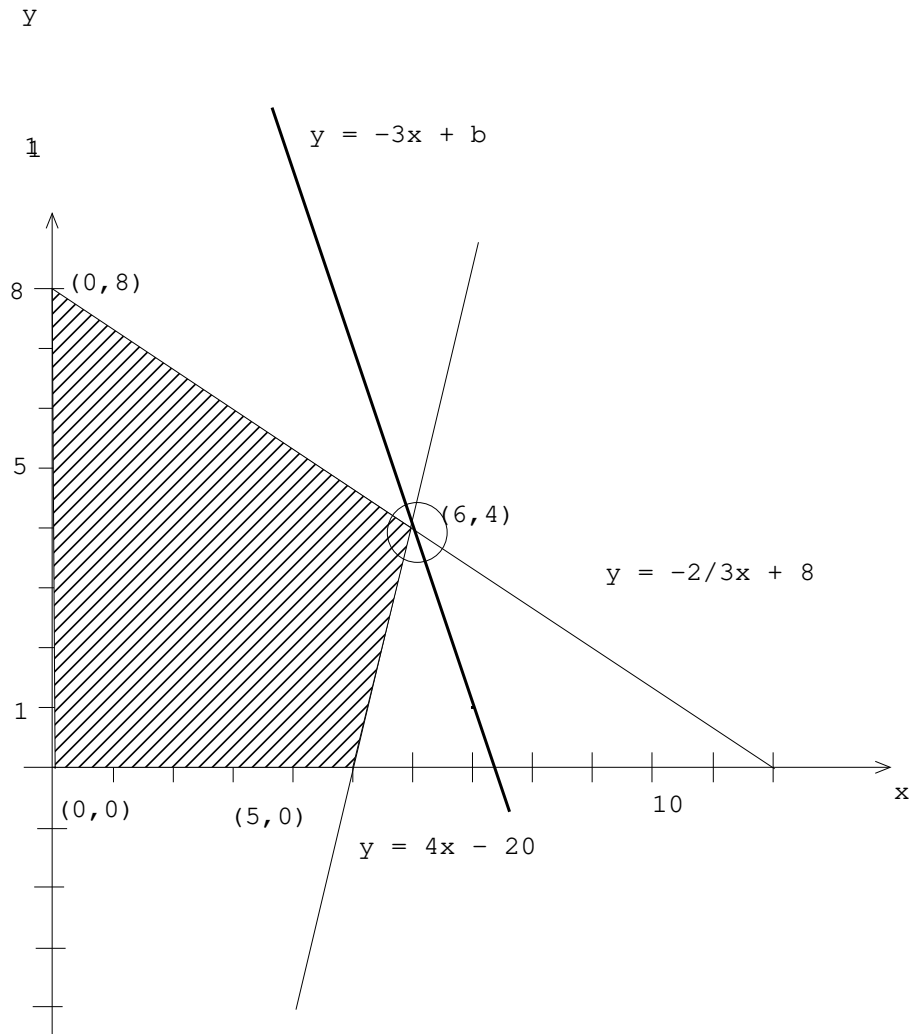


FIGURE 1 – résolution 2D du programme linéaire simplifié

Que nous passons sous forme standard :

$$\text{forme standard} \begin{cases} z = 3x_1 + x_2 + 20 \\ x_3 = 24 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 20 - 4x_1 + x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Les solutions de base sont :

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}) = (0, 0, 24, 20)$$

et la valeur de l'objectif  $z = 0$ .

La variable  $x_1$  est la variable hors-base qui a le plus grand coefficient dans la fonction objectif, c'est elle dont la valeur est augmentée. Dans les contraintes nous avons :

$$x_1 > \frac{24}{2} = 12 \Rightarrow x_3 < 0$$

$$x_1 > \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow x_4 < 0 \text{ contrainte la plus stricte}$$

C'est la deuxième contrainte qui est la plus stricte. Nous exprimons donc  $x_1$  dans cette équation :

$$x_1 = 5 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4$$

Ceci qui nous donne le programme suivant en remplaçant  $x_1$  :

$$\begin{cases} z = 3(5 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4) + x_2 + 20 \\ x_3 = 24 - 2(5 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4) - 3x_2 \\ x_1 = 5 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

Et se simplifie en :

$$\begin{cases} z = 35 + \frac{7}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_4 \\ x_3 = 14 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 = 5 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

Pour ce nouveau programme, la solution avec les variables hors-base nulles est :

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}) = (5, 0, 14, 0)$$

Et la valeur objectif  $z = 35$ .

C'est au tour de la variable  $x_2$  d'entrer en base. La valeur de  $x_2$  n'est limitée par la seconde contrainte, nous prenons donc la première et nous exprimons  $x_2$  dans cette équation :

$$x_2 = 4 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4$$

Ceci qui nous donne le programme suivant en remplaçant  $x_2$  :

$$\begin{cases} z = 35 + \frac{1}{4}(4 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4) - \frac{3}{4}x_4 \\ x_2 = 4 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 \\ x_1 = 5 + \frac{1}{4}(4 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4) - \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

Et se simplifie en :

$$\begin{cases} z = 36 - \frac{1}{14}x_3 - \frac{5}{7}x_4 \\ x_2 = 4 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 \\ x_1 = 6 - \frac{1}{14}x_3 - \frac{3}{14}x_4 \end{cases}$$

Il n'y a plus de variable à coefficient positif dans l'expression de  $z$ , nous sommes donc arrivés au bout de la maximisation avec :

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}) = (6, 4, 0, 0)$$

Et la valeur maximale du système simplifié est  $z = 36$  pour  $x_1 = 6$  et  $x_2 = 4$ .

Pour trouver la solution finale il faut calculer la valeur de  $x_3$ , à partir de l'équation :

$$x_3 = 10 - x_1 - x_2$$

Ce qui donne  $x_3 = 0$  et une valeur optimale de :  $500x_1 + 300x_2 + 200x_3 = 4200$ . Nous retrouvons bien les résultats de la solution graphique.

### Correction Exercice 3 : Réécriture de programme linéaire

**Solution question 3.1 :** *Convertir ce programme linéaire dans sa forme standard.*

Pour convertir le programme dans sa forme standard nous allons d'abord le mettre sous sa forme canonique.

La fonction objectif est une fonction linéaire à maximiser. Comme la fonction objectif de ce programme linéaire est une minimisation, il suffit de prendre l'opposé de cette fonction objectif pour rechercher ensuite à la maximiser.

Il faut d'autre part veiller à garantir les contraintes de positivité pour toutes les variables du problème linéaire. Seule  $x_1$  et  $x_3$  n'ont pas une telle contrainte. On remplace  $x_1$  par  $x'_1 - x''_1$ . Pour  $x_3$  le problème est un peu différent car cette variable n'apparaît dans aucune autre équation, ni dans la fonction objectif. On remplace donc la variable  $x_3$  par  $-x'_3$ . De plus, la contrainte d'égalité est remplacée par deux inégalités (si  $x = y$  ssi  $x \leq y$  et  $x \geq y$ ). D'où le problème linéaire équivalent :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \text{maximiser} & -2x'_1 & + & 2x''_1 & - & 7x_2 \\ \text{avec les contraintes} & x'_1 & - & x''_1 & & \leq & 7 \\ & -x'_1 & + & x''_1 & & \leq & -7 \\ & -3x'_1 & + & 3x''_1 & - & x_2 & \leq & -24 \\ & & & x'_1, x''_1, x_2, x'_3 & & \geq & 0 \end{array} \right.$$

On renomme les variables  $x'_1, x''_1, x_2$  et  $x'_3$  par  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$ . Le programme linéaire donné dans l'énoncé est donc équivalent au programme linéaire suivant, sous forme canonique :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \text{maximiser} & -2x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 \\ \text{avec les contraintes} & x_1 & - & x_2 & & \leq & 7 \\ & -x_1 & + & x_2 & & \leq & -7 \\ & -3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leq & -24 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Nous pouvons maintenant convertir le programme linéaire dans sa forme standard, en ajoutant des variables d'écart  $x_4, x_5$  et  $x_6$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser} \\ \text{avec les contraintes} \end{array} \right. \quad \begin{array}{rclclcl} & -2x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 \\ x_4 & = & 7 & - & x_1 & + & x_2 \\ x_5 & = & -7 & + & x_1 & - & x_2 \\ x_6 & = & -24 & + & 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & & \geq & 0 \end{array}$$

**Solution question 3.2 :** Quelles sont les variables de base et les variables hors-base ?

Les variables de base sont  $x_4, x_5$  et  $x_6$ . Les variables hors base sont  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .

**Solution question 3.3 :** Donner l'état des variables  $N, B, A, b, c$  et  $v$  utiles au bon déroulement de l'algorithme du simplexe.

$$N = \{1, 2, 3\} \quad B = \{4, 5, 6\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -24 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

A noter que ce programme linéaire n'est pas fait pour être résolu. Il sert juste à travailler sur la reformulation des équations et l'introduction de nouvelles variables. En effet, pour le résoudre il faut regarder le programme initial qui nous donne déjà la solution pour  $x_1$  ( $x_1 = 7$ ). On peut alors remplacer  $x_1$  dans la fonction objectif pour obtenir maximiser  $14 + 7x_2$ . Les seules contraintes qui existent sur  $x_2$  sont  $x_2 \geq 24$  et  $x_2 \geq 0$  ce qui revient à dire que  $x_2$  peut prendre n'importe quelle valeur supérieure à 24. Comme il n'est pas borné, la fonction de maximisation doit l'augmenter le plus possible donc lui donner une valeur infinie. Pour ce qui est de  $x_3$ , on ne sait pas quoi en faire puisqu'il n'intervient pas dans la fonction à maximiser. Il peut prendre n'importe quelle valeur pourvu qu'elle soit négative ( $x_3 \leq 0$ ).

### Correction Exercice 4 : Aliment pour bétail

**Solution question 4.1 :** Formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire en respectant d'abord la forme canonique et puis standard. Expliquer les différentes étapes de votre raisonnement.

$$\text{programme linéaire} \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \\ \text{avec les contraintes} \end{array} \right. \quad \begin{array}{rclclcl} 25x_1 & + & 41x_2 & + & 39x_3 \\ 12x_1 & + & 52x_2 & + & 42x_3 & \geq & 22 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 10x_3 & \geq & 3,6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\text{forme canonique} \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser} \\ \text{avec les contraintes} \end{array} \right. \quad \begin{array}{rclclcl} -25x_1 & - & 41x_2 & - & 39x_3 \\ -12x_1 & - & 52x_2 & - & 42x_3 & \leq & -22 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & - & 10x_3 & \leq & -3,6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & -1 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\text{forme standard} \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & -25x_1 - 41x_2 - 39x_3 \\ x_4 & = & -22 + 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 \\ x_5 & = & -3,6 + 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \\ x_6 & = & 1 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_7 & = & -1 + x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

**Solution question 4.2 :** *Montrer qu'il est possible de réduire la dimension du problème. Le résoudre graphiquement. Justifier.*

Il est possible de réduire le nombre de variables du programme linéaire précédent grâce à la 3ème équation. On tire  $x_3$  de cette équation :

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2$$

On remplace sa valeur dans le programme linéaire précédent.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \\ \text{avec les contraintes} \end{array} \begin{array}{rcl} 25x_1 + 41x_2 + 39(1 - x_1 - x_2) \\ 12x_1 + 52x_2 + 42(1 - x_1 - x_2) \geq 22 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10(1 - x_1 - x_2) \geq 3,6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

On obtient le programme linéaire suivant à 2 variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \\ \text{avec les contraintes} \end{array} \begin{array}{rcl} -14x_1 + 2x_2 \\ -30x_1 + 10x_2 \geq -20 \\ -8x_1 - 8x_2 \geq 6,4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Que l'on peut simplifier en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \\ \text{avec les contraintes} \end{array} \begin{array}{rcl} -7x_1 + x_2 \\ -3x_1 + x_2 \geq -2 \\ -x_1 - x_2 \geq 0,8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Finalement nous mettons le programme sous forme canonique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser} \\ \text{avec les contraintes} \end{array} \begin{array}{rcl} 7x_1 - x_2 \\ 3x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 0,8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

La figure 2 illustre la résolution 2D de ce problème. Dans cette figure on pose  $x_1 = x$  et  $x_2 = y$ . Les solutions du problème sont contenues dans le simplexe défini par les

4 points  $(0,0)$ ,  $(\frac{2}{3},0)$ ,  $(0.7, 0.1)$  et  $(0, 0.8)$ . Pour le programme 2D, la recherche de la solution optimale nous conduit à déplacer la courbe  $y = 7x + b$ . L'expression à maximiser a la plus grande valeur au niveau de l'intersection de la droite  $3x - y - 2 = 0$  avec la droite  $x + y - 0.8 = 0$ .

Ainsi la solution de ce problème est  $x_1 = 0.7$ ,  $x_2 = 0.1$  et  $x_3 = 0.2$  avec une valeur de 29.4 pour la valeur minimale du prix de la tonne d'aliment ayant les propriétés recherchées.

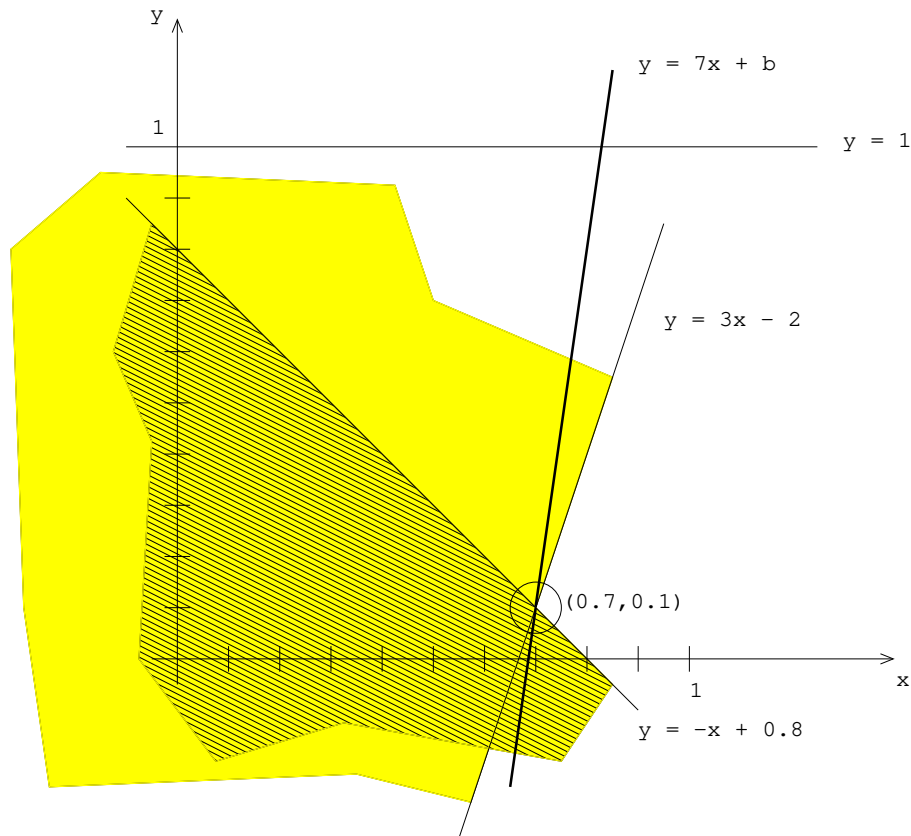


FIGURE 2 – résolution 2D du programme linéaire simplifié

**Solution question 4.3 :** *Faire la résolution du problème en utilisant l'algorithme du simplexe.*

Pour répondre à cette questions nous repartons de la forme simplifiée du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{maximiser} & 7x_1 - x_2 \\ \text{avec les contraintes} & \begin{array}{ll} 3x_1 - x_2 & \leq 2 \\ x_1 + x_2 & \leq 0,8 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \end{array} \right.$$

Que nous passons sous forme standard :

$$\text{forme standard} \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 7x_1 - x_2 \\ x_3 & = & 2 - 3x_1 + x_2 \\ x_4 & = & \frac{4}{5} - x_1 - x_2 \end{array} \right. \geq 0$$

À noter que nous avons mis la valeur 0.8 sous forme de fraction ( $\frac{4}{5}$ ) pour des raisons de simplicité. Et les solutions de base sont :

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}) = (0, 0, 2, \frac{4}{5})$$

et la valeur de l'objectif  $z = 0$ .

La variable  $x_1$  est la variable hors-base qui a le plus grand coefficient dans la fonction objectif, c'est elle dont la valeur est augmentée. Dans les contraintes nous avons :

$$\begin{array}{lcl} x_1 > \frac{2}{3} & \Rightarrow & x_3 < 0 \text{ contrainte la plus stricte} \\ x_1 > \frac{4}{5} & \Rightarrow & x_4 < 0 \end{array}$$

C'est la première contrainte qui est la plus stricte. Nous exprimons donc  $x_1$  dans cette équation :

$$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3$$

Ceci qui nous donne le programme suivant en remplaçant  $x_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 7(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3) - x_2 \\ x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 = \frac{4}{5} - (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3) - x_2 \end{array} \right.$$

Et se simplifie en :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \frac{14}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{7}{3}x_3 \\ x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 = \frac{2}{15} - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \end{array} \right.$$

Pour ce nouveau programme, la solution avec les variables hors-base nulles est :

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}) = (\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{15}, 0)$$

Et la valeur objectif  $z = \frac{14}{3}$ .

C'est au tour de la variable  $x_2$  d'entrer en base. Dans les contraintes, la valeur de  $x_2$  n'est limitée par la première donc nous prenons la deuxième :

$$x_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4$$

Ceci qui nous donne le programme suivant en remplaçant  $x_2$  :

$$\begin{cases} z = \frac{14}{3} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4\right) - \frac{7}{3}x_3 \\ x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4\right) - \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \end{cases}$$

Et se simplifie en :

$$\begin{cases} z = \frac{24}{5} - 2x_3 - x_4 \\ x_1 = \frac{7}{10} - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \end{cases}$$

Il n'y a plus de variable à coefficient positif dans l'expression de  $z$ , nous sommes donc arrivés au bout de la maximisation avec :

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}) = \left(\frac{7}{10}, \frac{1}{10}, 0, 0\right)$$

Et la valeur maximale du système simplifié est  $z = \frac{24}{5} = 4.8$  pour  $x_1 = \frac{7}{10}$  et  $x_2 = \frac{1}{10}$ .  
Pour trouver la solution finale il faut calculer la valeur de  $x_3$ , à partir de l'équation :

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2$$

Ce qui donne  $x_3 = \frac{2}{10}$  et une valeur optimale de :  $25x_1 + 41x_2 + 39x_3 = \frac{294}{10} = 29,4$

### **Correction Exercice 5 : Minisation**

Le programme linéaire est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \text{minimiser} & x_1 & + & x_2 \\ \text{avec les contraintes} & 4x_1 & - & x_2 \leq 8 \\ & 2x_1 & + & x_2 \leq 20 \\ & 5x_1 & - & 2x_2 \geq -2 \\ & 2x_1 & + & x_1 \geq 10 \\ \text{et} & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

### **Solution question 5.1 : Résoudre graphiquement le problème**

Sa résolution par la méthode graphique est possible puisque le programme linéaire ne comporte que deux variables. Cependant deux points peuvent attirer notre attention :

- nous ne cherchons pas à maximiser la fonction objectif mais à la minimiser.
- deux des contraintes sont supérieur ou égal plutôt que inférieur ou égal.

Dans la méthode graphique il n'est pas nécessaire de transformer le programme linéaire pour le mettre sous forme canonique. Une minimisation conduira à faire déplacer la droite



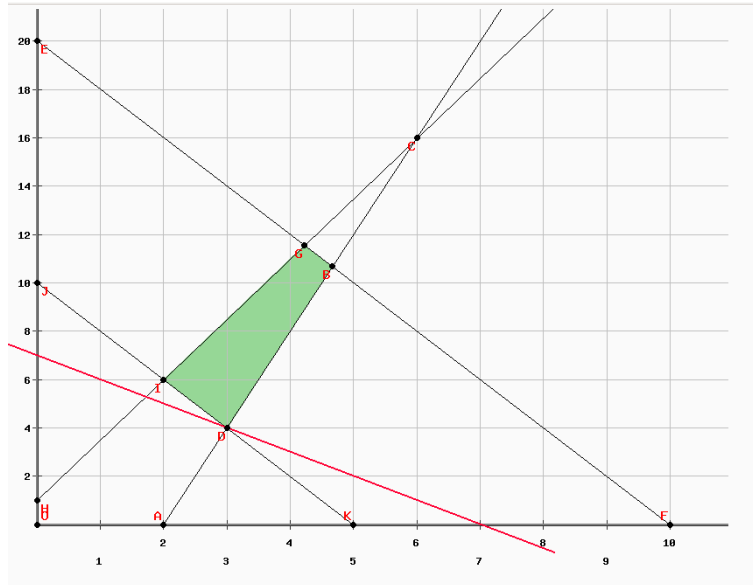


FIGURE 3 – Résolution graphique d'un problème de minimisation

de la fonction objectif vers le bas plutôt que vers le haut. Une contrainte de supériorité, plutôt que d'infériorité, se traduit simplement par le demi-plan opposé.

Ici nous prenons le problème tel qu'il est sans modifier son expression.

Solution optimale :  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$ ,  $z = 7$

À noter que, pour la résolution des problèmes de minimisation, il est nécessaire d'introduire des variables artificielles, en plus des variables d'écart, pour donner au problème exploitable par l'algorithme du simplexe. Nous n'aborderons pas cette partie dans le cours.