Ondes acoustiques
- le cas des fluides -

Vincent Laude

Institut FEMTO-ST, département MN2S
équipe MINANO
« Micro-Instrumentation, NANosciences et Ondes »
32 avenue de l'Observatoire F-25044 Besançon

Email: `vincent.laude@femto-st.fr`
Toile: `http://members.femto-st.fr/vincent-laude/`

1 Modèle unidimensionnel (1D)

1.1 Equation d'onde

Une onde est de façon générale une perturbation de l'équilibre d'un milieu qui se propage dans l'espace au cours du temps.

Soit donc une fonction $u(t,x)$, une équation d'onde est du type :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

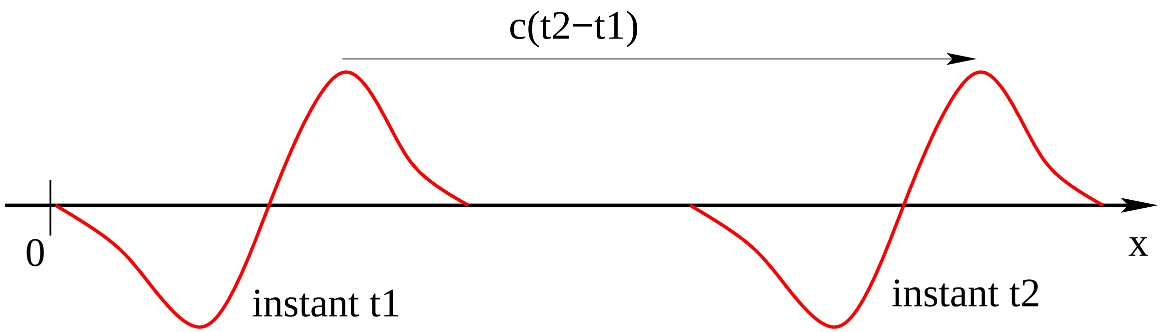
c est homogène à une vitesse (la célérité), en m/s

1.2 Solution générale ?

Il est aisé de vérifier que la solution générale est :

$$u(t,x) = F(t - x/c) + G(t + x/c) \quad (2)$$

où F et G sont des fonctions quelconques (2 fois dérivables) qui représentent une onde se propageant vers la droite et une onde se propageant vers la gauche, indépendamment.



Exemple : la vibration $F(t) = \cos(\omega t)$ donne $u(t,x) = \cos(\omega t - kx)$

$\omega = 2\pi f$ est la pulsation, ou fréquence angulaire ; f est la fréquence (en Hz)

$k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde ; λ est la longueur d'onde

1.3 Spectre d'ondes planes

Toute fonction (suffisament régulière) admet une transformée de Fourier et réciproquement :

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(\mathrm{i}\omega t)\, \mathrm{d}\omega\, ;\; \tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-\mathrm{i}\omega t)\, \mathrm{d}t \tag{3}$$

d'où le spectre d'ondes planes d'une solution de l'équation d'onde :

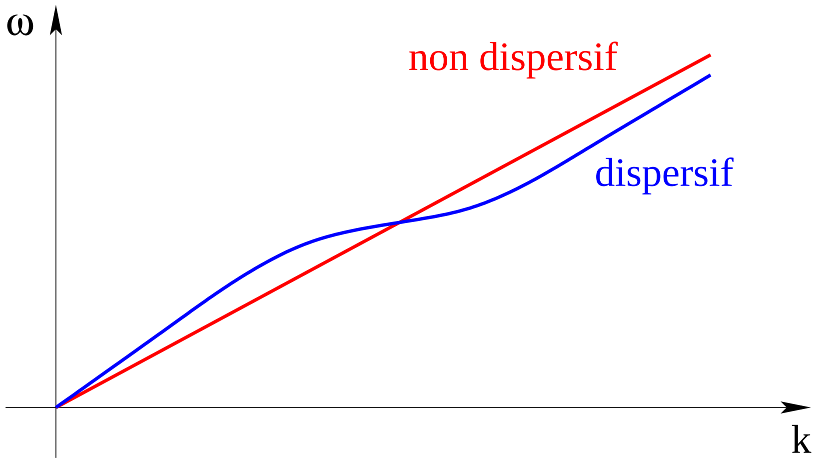
$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(\mathrm{i}\,(\omega t - kx))\, \mathrm{d}\omega \text{ avec } k(\omega) = \omega / c \tag{4}$$

(et un terme similaire avec $\tilde{G}(\omega)$ et $k(\omega) = -\omega / c$).

$k^2(\omega) = (\omega / c)^2$ est une relation de dispersion.

1.4 Dispersion et vitesse de groupe

Si la vitesse des ondes est dispersive (elle dépend de la fréquence), $c(\omega)$, alors la relation de dispersion $k(\omega) = \pm\omega / c(\omega)$ ne définit plus des droites.



Pour un paquet d'ondes : $u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(\mathrm{i}\,(\omega t - k(\omega)\,x))\,\mathrm{d}\omega$

La vitesse de phase est $v(\omega) = \omega / k(\omega)$. La lenteur est $s(\omega) = 1/v(\omega)$.

La vitesse de groupe est par définition $v_g\,(\omega) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = (\frac{\mathrm{d}k(\omega)}{\mathrm{d}\omega})^{-1}$.

Propriété : la vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie spectrale de l'onde, c'est-à-dire la relation

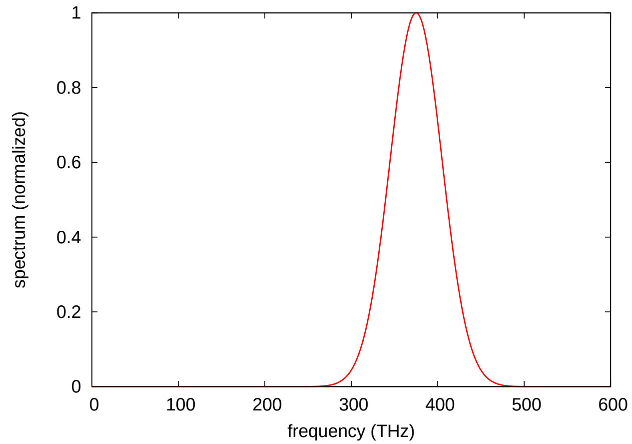
$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,|u(t, x)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{v_{g(\omega)}} |\tilde{F}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \tag{5}$$

1.5 Exemples de dispersions et leur influence

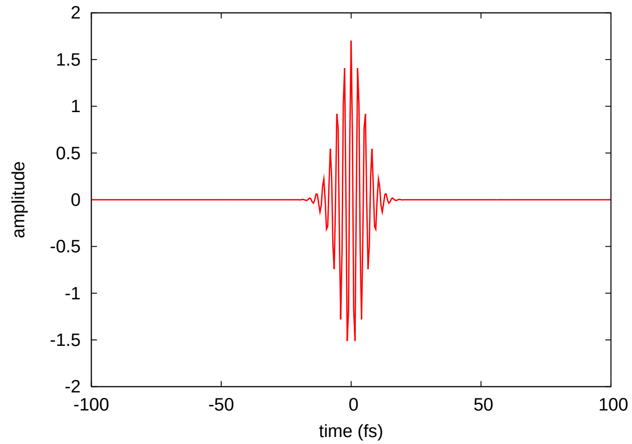
La phase de propagation au point $x = L$ est $\varphi(\omega) = k(\omega) L$.

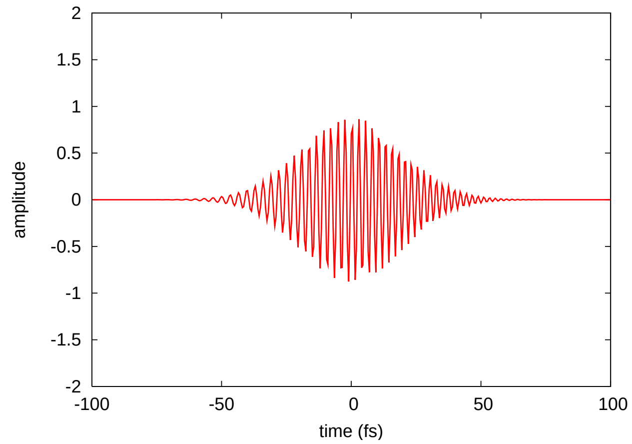
$t_g(\omega) = \mathrm{d}\varphi(\omega)\,/\,\mathrm{d}\omega = L\,/\,v_g(\omega)$ est le temps de groupe (temps pour parcourir L).

Phase polynômiale $\varphi(\omega) = \varphi_0 + \varphi_0'(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2!}\varphi_0''(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{3!}\varphi_0'''(\omega - \omega_0)^3 + \ldots$

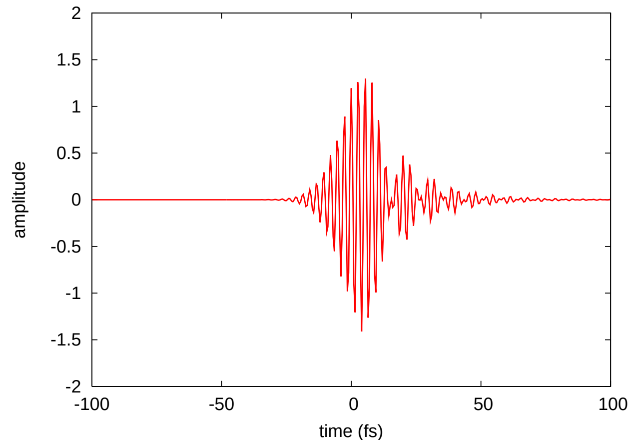


$\leftarrow$ spectre ; impulsion $\rightarrow$





$\leftarrow \varphi_0''$; $\varphi_0''' \rightarrow$

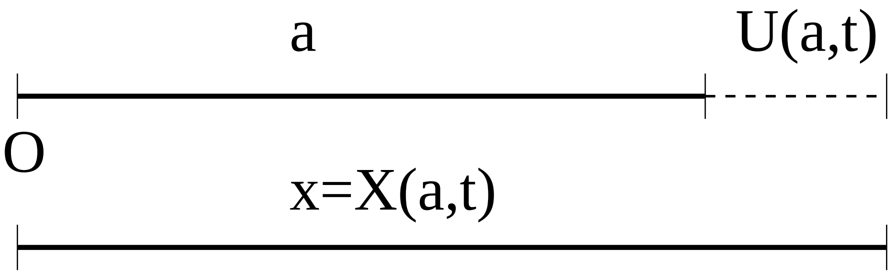


2 Ondes acoustiques 1D

2.1 Descriptions lagrangienne et eulérienne

Soit un fluide continu, isotrope, homogène et parfaitement compressible.

- Variables de Lagrange attachées au point matériel : position d'équilibre a et temps t. Grandeur physique : $G(a,t)$.
- Variables d'Euler attachées au point géométrique du référentiel : coordonnée x et temps t. La même grandeur physique : $g(x,t)$.

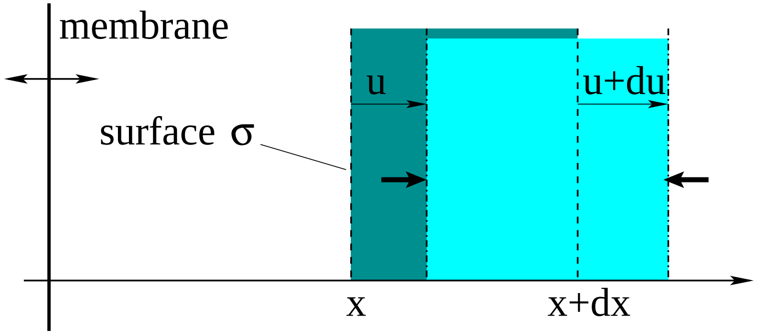


Position du point matériel : $x = X(a,t)$, donc $G(a,t) = g(X(a,t),t)$
Déplacement : $U(a,t) = X(a,t) - a = u(X(a,t),t)$
Vitesse particulaire $V_p = \partial U / \partial t = \partial X / \partial t$ et vitesse locale $v = \partial u / \partial t$

$$V_p = v + V_p \frac{\partial u}{\partial x} \tag{6}$$

Approximation de l'acoustique linéaire : $\partial u / \partial x \ll 1$ et donc $V_p \simeq v$

2.2 Relations entre pression et déplacement



$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\,\mathrm{d}x \ll \mathrm{d}x$$

Résultante des forces de pression sur une tranche de largeur dx et section σ :

$$\mathrm{d}F = \sigma\, p(t, x+u) - \sigma\, p(t, x+u+\mathrm{d}x) \simeq -\sigma\,\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

Par application de la relation fondamentale de la dynamique :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7}$$

où ρ_0 est la densité (statique) du fluide.

2.3 Relations entre pression et déplacement (suite)

La pression est la somme de la pression au repos et de l'écart de pression δp :

$$p(t,x) = p_0 + \delta p(t,x) \tag{8}$$

Pour un fluide compressible, on a la relation ($\mathrm{d}V = \sigma\, \mathrm{d}x$) :

$$\delta p = -\frac{1}{\chi}\frac{\delta(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}V} = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9}$$

où χ est le coefficient de compressibilité. Par définition, $S(t,\, x) = \partial u / \partial x$ est la dilatation locale (strain en anglais).

En associant (9) et (11), on obtient l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ ou } \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} = 0 \text{ avec } c = (\rho_0\, \chi)^{-1/2} \tag{10}$$

La vitesse v et la dilatation locale S satisfont la même équation d'onde.

2.4 Vitesse du son

Comment prévoir la vitesse c du son dans un gaz supposé parfait ?

- L'équation d'état du gaz parfait, de masse molaire M, pour n moles est $pV = nRT$ ou $p = \rho RT/M$, (T température, $R = 8.314$ J/mole.K)
- Les compressions et dilatations provoquées par l'onde acoustique sont adiabatiques (et non isothermes) et suivent la loi pV^γ = Cste. D'où la relation $\chi = (\gamma p_0)^{-1}$. $\gamma = 1.67$ pour un gaz monoatomique et 1.4 pour un gaz diatomique (à peu près le cas de l'air).

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} + \gamma \frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \text{ donc } \chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\gamma p_0}$$

$$\text{et donc } c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

mais mieux vaut se fier aux résultats expérimentaux !

$c \simeq 343$ m/s pour l'air à $T = 293$ K.

Et dans l'eau ?

$c \simeq 1480$ m/s pour l'eau à $T = 293$ K.

2.5 Impédance acoustique

Le déplacement u est solution de l'équation d'onde (12), donc

$$u(t,x) = F(t - x/c) + G(t + x/c)$$

avec F et G deux fonctions arbitraires. Donc

$$v(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t} = F'(t - x/c) + G'(t + x/c)$$

$$\delta p(t,x) = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial u}{\partial x} = Z\,(F'(t - x/c) - G'(t + x/c))$$

avec l'impédance acoustique $Z = \rho_0 c = \frac{1}{c\chi} = \sqrt{\rho_0/\chi}$.

Ecart de pression et vitesse sont proportionnels pour les ondes se propageant vers la droite, $\delta p_+ = Z v_+$, et vers la gauche, $\delta p_- = -Z v_-$.

Cette relation est analogue à celle de l'impédance électrique : $U = ZI$

2.6 Représentation des pertes de propagation ?

Un fluide ne peut en pratique réagir instantanément à une sollicitation. Phénoménologiquement, on modifie (11) en :

$$\delta p = -\frac{1}{\chi}\left(S + \tau\frac{\partial S}{\partial t}\right) \tag{11}$$

où τ est une constante de temps.

Illustration - Pour $\delta p = H(t)$, montrer que $S = -\chi\,(1 - \exp\,(-t/\tau))H(t)$.

L'équation de propagation devient $\partial^2 u/\partial t^2 - c^2\,\partial^2/\partial x^2(u + \tau\partial u/\partial t) = 0$ (ce n'est plus une équation d'onde !). Pour une onde plane monochromatique, $F(\omega t - kx)$, on obtient la relation de dispersion complexe $\omega^2 = c^2\,(1 + \mathrm{i}\omega\tau)\,k^2$.

Exercice - Poser $k = \beta - \mathrm{i}\alpha$ de sorte que l'onde plane harmonique

$$u(t,x) = \exp\,(\mathrm{i}(\omega t - kx)) = \exp\,(-\alpha x)\exp\,(\mathrm{i}(\omega t - \beta x)) \tag{12}$$

Montrer que $\alpha \simeq \frac{\omega^2\,\tau}{2\,c}$ et $\beta \simeq \frac{\omega}{c}(1 - \frac{3}{8}\omega^2\tau^2)$ pour $\omega\tau \ll 1$. α s'exprime en dB/m.

Propriété - En pratique, on peut complexifier le coefficient de compressibilité $\chi \to \chi/\ (1 + \mathrm{i}\omega\tau)$ et former le spectre d'ondes planes (4) avec les ondes planes harmoniques atténuées (14).

3 Modèle tridimensionnel des ondes (3D)

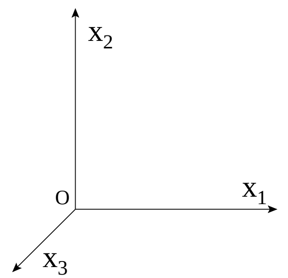
3.1 Equation d'onde 3D

Soit une fonction $u(t, \boldsymbol{r})$, une équation d'onde isotrope est du type :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \triangle u = 0 \tag{13}$$

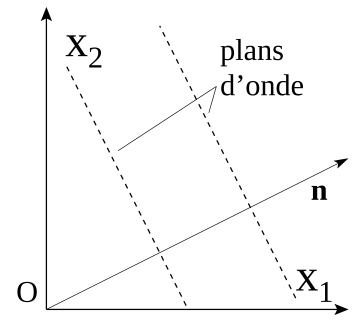
avec le laplacien $\triangle = \nabla . \nabla = \frac{\partial^{\,2}}{\partial x^{\,2}} + \frac{\partial^{\,2}}{\partial y^{\,2}} + \frac{\partial^{\,2}}{\partial z^{\,2}}$. Isotropie : les propriétés du milieu sont invariantes par rotation dans l'espace. Donc la propagation est la même dans toutes les directions.
Une équation d'onde anisotrope est du type :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{3} c_{i\,j}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \tag{14}$$



La propagation des ondes dépend de la direction.

3.2 Onde plane et onde plane harmonique



Une onde plane 3D est de la forme

$$u(t,\boldsymbol{r}) = F(t - \boldsymbol{n}.\boldsymbol{r}\,/\,c) = F\left(t - \frac{n_1\,x_1 + n_2\,x_2 + n_3\,x_3}{c}\right) \tag{15}$$

avec $\boldsymbol{n}$ un vecteur unitaire représentant la direction de propagation. La décomposition (2) n'est plus la solution générale de l'équation d'onde.

Une onde plane harmonique est de la forme

$$u(t,\boldsymbol{r}) = \exp\left(\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r})\right) \tag{16}$$

Pour l'équation d'onde isotrope (15), on a la relation de dispersion $\omega^2 = c^2\,\boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = c^2\,k^2$, avec $\boldsymbol{k} = k\,\boldsymbol{n}$.

Pour l'équation d'onde anisotrope (16), on a $\omega^2 = \sum_{i,j=1}^{3}\, c_{ij}^2 k_i k_j$

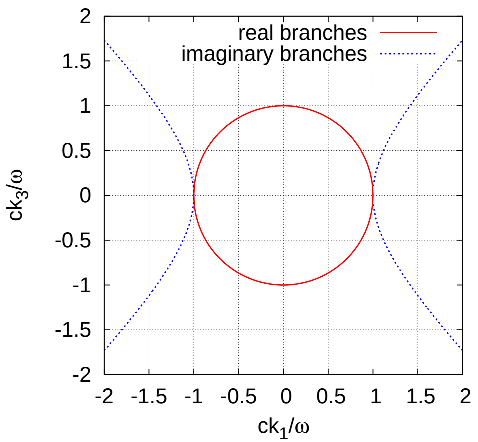
3.3 Spectre d'ondes planes

Est-il possible de généraliser en 3D le spectre d'onde plane 1D (4) ? Prenons la transformée de Fourier en temps et en espace, valable pour toute fonction u :

$$u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \tilde{u}(\omega,\boldsymbol{k})\exp(\mathrm{i}\,(\omega t - \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r})) \tag{17}$$

Si u est une solution de l'équation d'onde, ω et $\boldsymbol{k}$ sont liés par une relation de dispersion. Donc k_3, par exemple, est fonction de ω, k_1 et k_2 :

$$u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\, \tilde{u}(\omega,\boldsymbol{k})\exp(\mathrm{i}\,(\omega t - k_1x_1 - k_2x_2 - k_3(\omega,k_1,k_2)x_3)) \tag{18}$$



Exemple - si $k^2 = \omega^2/c^2$, alors

$$k_3 = \pm\sqrt{\omega^2/c^2 - k_1^2 - k_2^2}\ \mathrm{si}\ \omega^2/c^2 - k_1^2 - k_2^2 \geq 0\ \mathrm{ou}\ k_3 = \pm\mathrm{i}\sqrt{|\omega^2/c^2 - k_1^2 - k_2^2|}\ \mathrm{sinon}$$

3.4 Dispersion temporelle et spatiale

Supposons connaitre la relation de dispersion sous la forme $k(\omega, \boldsymbol{n})$. Alors :

- $v(\omega, \boldsymbol{n}) = \omega / k(\omega, \boldsymbol{n})$ la vitesse de phase ; $s(\omega, \boldsymbol{n}) = k(\omega, \boldsymbol{n})/\omega$ la lenteur
- $v_g(\omega, \boldsymbol{n}) = (\partial k / \partial \omega)^{-1}$ la vitesse de groupe (temporelle) donne la vitesse de la propagation d'un signal.
- $\boldsymbol{v}_g(\omega, \boldsymbol{n}) = \omega(\nabla_{\boldsymbol{n}} k^{-1}) = (\nabla_{\boldsymbol{n}} v)$ la vitesse de groupe (spatiale) donne la vitesse et la direction de propagation du front d'onde.

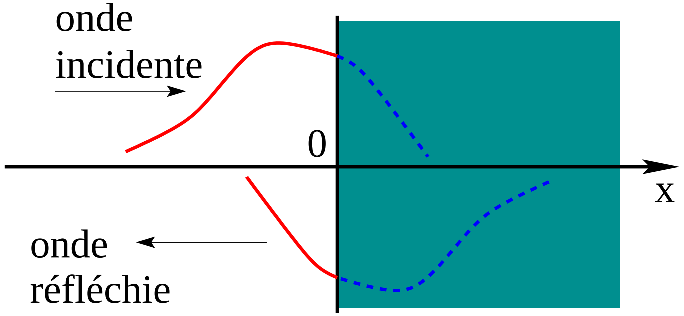
Principe de la phase stationnaire - Si on peut utiliser la représentation (typique du champ lointain) :

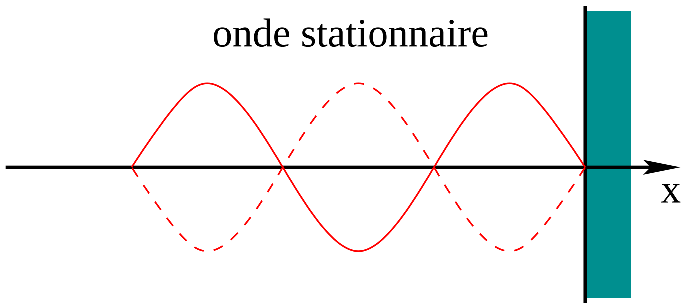
$$u(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}\boldsymbol{n}\, \tilde{u}(\omega, \boldsymbol{n}) \exp\left(\mathrm{i}(\omega t - k(\omega, \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n}.\boldsymbol{r})\right) \tag{19}$$

l'énergie se concentre suivant les trajectoires telles que la phase dans l'exponentielle est stationnaire en temps et espace, soit

$$t = v_g^{-1} (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r}) \text{ et } v\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_g (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r}) \tag{20}$$

3.5 Réflexion totale d'une onde plane - incidence normale



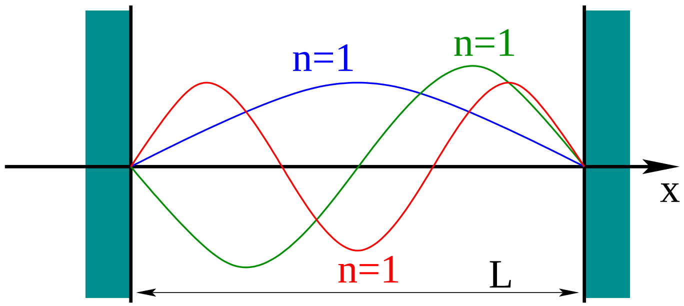


Soit l'onde plane incidente $F_i(t - x/c)$, l'onde réfléchie $G_r(t + x/c)$ est aussi plane. L'onde totale est $u(t, \boldsymbol{r}) = F_i(t - x/c) + G_r(t + x/c)$.

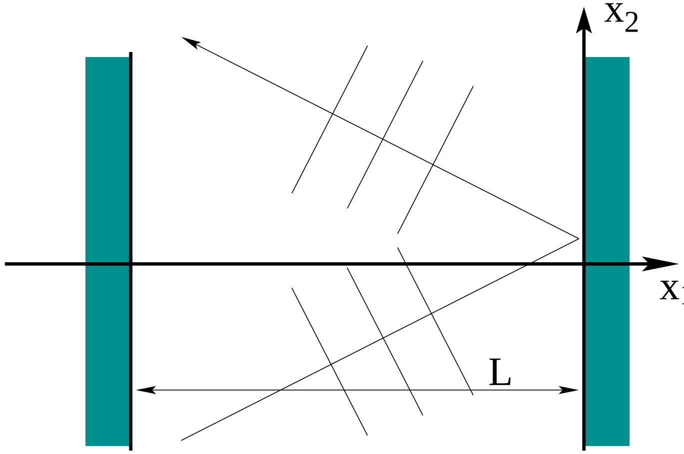
On suppose que l'amplitude des ondes s'annule sur le miroir (condition de blocage), alors $G_r(t) = -F_i(t)$ et $u(t, \boldsymbol{r}) = F_i(t - x/c) - F_i(t + x/c)$.

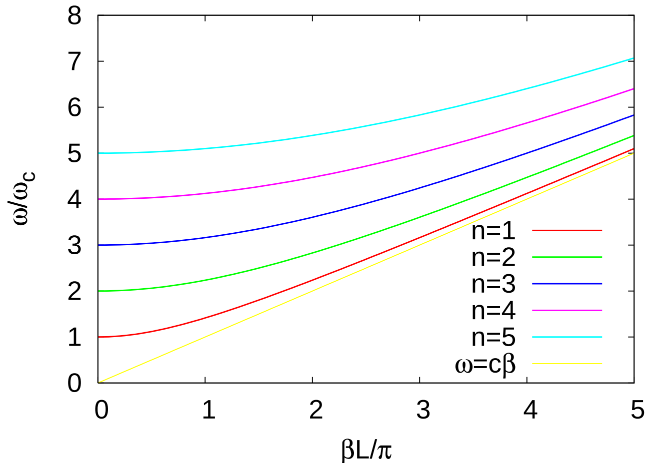
Si $F_i(t) = \exp\,(\mathrm{i}\omega t)$, alors $u(t, \boldsymbol{r}) = -2\mathrm{i}\exp\,(\mathrm{i}\omega t)\sin\,(\omega x/c)$ est une onde stationnaire.

Dans un résonateur, les modes sont discrets : $\omega L/c = n\pi$ avec $n \geqslant 1$ entier



3.6 Guidage des ondes entre deux miroirs plans





Pour que la superposition de deux ondes planes harmoniques respecte les conditions aux limites sur les miroirs il faut respecter l'accord de phase :

- la fréquence se conserve ;
- le vecteur d'onde le long des miroirs se conserve.

D'où la décomposition :

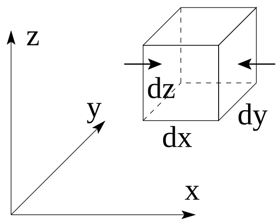
$$u(t,\boldsymbol{r}) = \exp\left(\mathrm{i}(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)\right) - \exp\left(\mathrm{i}(\omega t + k_1 x_1 - k_2 x_2)\right) = -2\mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}(\omega t - k_2 x_2)\right)\sin(k_1 x_1)$$

qui est une onde propagative suivant x_2 mais stationnaire suivant x_1.
Relation de dispersion : $k_1 L = n\pi$ et $k_2^2 = \beta^2 = \omega^2/c^2 - (n\pi/L)^2$, pour $n \geqslant 1$.
Il existe une fréquence de coupure $\omega_c = \pi c/L$ (ou $f_c = c/(2L)$).

4 Ondes acoustiques 3D

4.1 Relations entre pression et déplacements

On généralise la relation (10) en



$$p(t,\boldsymbol{r}) = p_0 + \delta p(t,\boldsymbol{r}) \text{ avec le vecteur position } \boldsymbol{r} = (x,y,z)^T \tag{21}$$

La dilation locale devient

$$S(t,\boldsymbol{r}) = \frac{\delta(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}V} = \nabla . \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{22}$$

Relation fondamentale de la dymanique :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = -\left(\frac{\partial(\delta p)}{\partial x}, \frac{\partial(\delta p)}{\partial y}, \frac{\partial(\delta p)}{\partial z}\right)^T = -\nabla(\delta p) \tag{23}$$

L'équation (25) montre que la polarisation d'une onde plane est longitudinale : les déplacements ont lieu uniquement dans le sens de propagation.

4.2 Equation d'onde acoustique 3D

Pour un fluide compressible à comportement linéaire, on a toujours $S = -\chi\,\delta p$.

D'où l'équation d'onde 3D scalaire (pour δp ou S) ou vectorielle (pour $\boldsymbol{u}$ ou $\boldsymbol{v}$) :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - c^2 \triangle \boldsymbol{u} = 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 (\delta p)}{\partial t^2} - c^2 \triangle (\delta p) = 0 \text{ avec } c = (\rho_0\,\chi)^{-1/2} \tag{24}$$

Exercice - Montrer (26) !

Généralisation - Supposons qu'il existe une densité de force par unité de volume, $\boldsymbol{f}$, due à la pesanteur ($\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{g}$) ou à des sources extérieures, alors (25) et (26) deviennent

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} + \nabla(\delta p) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{r}) \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - c^2 \triangle \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}/\rho_0\,;\; \frac{\partial^2 (\delta p)}{\partial t^2} - c^2 \triangle (\delta p) = -c^2\,\nabla \boldsymbol{f} \tag{26}$$

4.3 Flux de puissance et vecteur de Poynting

On définit les grandeurs énergétiques :

- l'énergie cinétique $E_c = \int_V e_c \mathrm{d}V$ avec $e_c = \frac{1}{2}\rho_0 \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}$
- l'énergie potentielle $E_p = \int_V e_p \mathrm{d}V$ avec $e_p = \frac{1}{2}\frac{S^2}{\chi} = \frac{1}{2}\chi(\delta p)^2$
- le vecteur de Poynting $\boldsymbol{P} = \delta p\, \boldsymbol{v}$
- le travail des forces internes $W = \int_V w\,\mathrm{d}V$ avec $\frac{\partial w}{\partial t} = \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v}$

A partir de (27) : (avec $\nabla(\delta p \boldsymbol{v}) = \nabla(\delta p).\boldsymbol{v} + \delta p \nabla \boldsymbol{v}$ et $\nabla \boldsymbol{v} = \partial S / \partial t$)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \rho_0 \boldsymbol{v}.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla(\delta p).\boldsymbol{v} = \frac{\partial e_c}{\partial t} + \frac{\partial e_p}{\partial t} + \nabla.\boldsymbol{P}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(E_c + E_p) + \int_\sigma \boldsymbol{P}.\boldsymbol{l}\, \mathrm{d}\sigma \tag{27}$$

Le flux du vecteur de Poynting représente la puissance transportée par l'onde.

4.4 Relations énergétiques pour les ondes planes

Le vecteur de Poynting représente la densité de puissance instantanée par unité de surface transportée par l'onde. L'intensité acoustique est par définition

$$I = <\boldsymbol{P}(t).\boldsymbol{l}> = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\delta p\,\boldsymbol{v}.\boldsymbol{l} \tag{28}$$

Pour une onde plane dans la direction $\boldsymbol{l}$, $u = F(t - x/c)$, $v = F'(t - x/c)$ et $\delta p = \mathrm{ZF}'(t - x/c)$, avec x suivant l'axe $\boldsymbol{l}$.
Alors $e_c = e_p = \frac{1}{2}\rho_0 F'^2(t - x/c)$ et $\boldsymbol{P}.\boldsymbol{l} = ZF'^2(t - x/c) = c(e_c + e_p)$.
Pour une onde plane harmonique dans la direction $\boldsymbol{l}$, $u = u_m\sin(\omega(t - x/c))$, donc $v = \omega u_m\cos(\omega(t - x/c)) = v_m\cos(\omega(t - x/c))$.

- $e_c = e_p = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 u_m^2\cos^2(\omega(t - x/c))$ et $<e_c> = <e_p> = \frac{1}{4}\rho_0\omega^2 u_m^2 = \frac{1}{4}\rho_0 v_m^2$
- $\boldsymbol{P}.\boldsymbol{l} = Zv_m^2\cos^2(\omega(t - x/c))$
- $I = \frac{1}{2}Zv_m^2 = \frac{1}{2Z}(\delta p_m)^2$

Pour les ondes planes harmoniques complexes, il faut utiliser

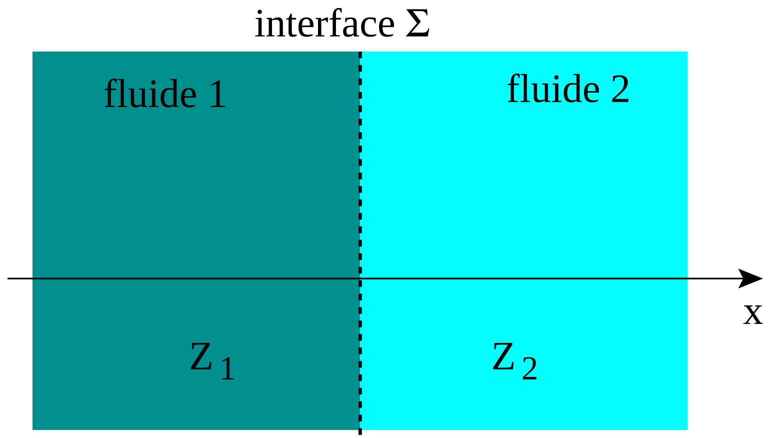
$$e_c = \frac{1}{4}\rho_0\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{v})\ ;\ e_p = \frac{1}{4}\chi\mathrm{Re}(\delta p^*\delta p)\ ;\ \boldsymbol{P} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\delta p\,\boldsymbol{v}^*) \tag{29}$$

4.5 Réflexion et réfraction

4.5.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites à la frontière de deux fluides non visqueux (séparés par une paroi supposée infiniment mince) sont :

- la continuité des composantes des déplacements normales à l'interface ;
- la continuité des surpressions acoustiques δp à l'interface.



Si l'interface est définie par $x=0$, alors

$$u_{1x}(t, x=0, y, z) = u_{2x}(t, x=0, y, z) \tag{30}$$

et idem pour les composantes normales de la vitesse, et

$$\delta p_1(t, x=0, y, z) = \delta p_2(t, x=0, y, z) \tag{31}$$

4.5.2 Incidence normale pour une onde plane

Une onde plane incidente normalement donne naissance à des ondes planes réfléchie et transmise. Les déplacements normaux à l'interface sont $u_{1x}(t,\boldsymbol{r}) = F_i(t - x/c_1) + F_r(t + x/c_1)$ et $u_{2x}(t,\boldsymbol{r}) = F_t(t - x/c_2)$. A l'interface $(x=0)$:

$$F_i'(t) + F_r'(t) = F_t'(t) \text{ et } Z_1(F_i'(t) - F_r'(t)) = Z_2 F_t'(t)$$

De ces équations, on tire les coefficients de réflexion et transmission de la vitesse

$$r_v = \frac{F_r'(t)}{F_i'(t)} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ et } t_v = \frac{F_t'(t)}{F_i'(t)} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \tag{32}$$

les coefficients de réflexion et transmission de la surpression

$$r_p = -\frac{F_r'(t)}{F_i'(t)} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \text{ et } t_p = \frac{Z_2}{Z_1}\frac{F_t'(t)}{F_i'(t)} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{33}$$

les facteurs de réflexion et transmission de la puissance acoustique

$$R = \frac{|P_r|}{|P_i|} = -r_v\, r_p = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \text{ et } T = t_v\, t_p = \frac{4\, Z_1\, Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1 - R \tag{34}$$

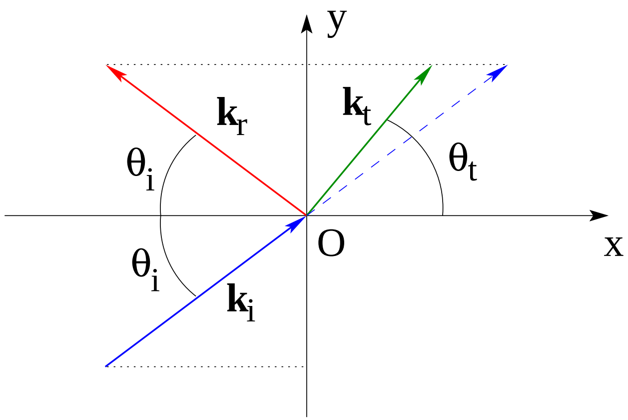
4.5.3 Incidence oblique pour une onde plane harmonique

Pour une onde plane harmonique, l'égalité des composantes normales des déplac-ments donne en $\boldsymbol{r} = (0, y, z)^T$:

$$A_{i\,x}\mathrm{exp}(\mathrm{i}(\omega_i t - \boldsymbol{k}_i.\boldsymbol{r})) + A_{r\,x}\mathrm{exp}(\mathrm{i}(\omega_r t - \boldsymbol{k}_r.\boldsymbol{r})) = A_{t\,x}\mathrm{exp}(\mathrm{i}(\omega_t t - \boldsymbol{k}_t.\boldsymbol{r}))$$

Cette relation est vraie $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall \boldsymbol{r} \in \Sigma$, donc

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \ \text{ et } \ \boldsymbol{k}_i.\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r.\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_t.\boldsymbol{r}$$



Ce qui traduit les propriétés :

- La réflexion et la transmission sur une interface immobile se font sans changement de fréquence.
- La loi de Snell-Descartes : les composantes le long de l'interface du vecteur d'onde se conservent : $\theta_r = \theta_i$ et $\sin\theta_t / c_2 = \sin\theta_i / c_1$.

La surpression sur Σ est $\delta p(t,\boldsymbol{r}) = (A_i + A_r)\mathrm{exp}(\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r})) = A_t\mathrm{exp}(\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}))$, avec la continuité de la composante normale de la vitesse on a

$$A_i + A_r = A_t \;\text{ et }\; \frac{A_i}{Z_1}\cos\theta_i - \frac{A_r}{Z_1}\cos\theta_i = \frac{A_t}{Z_2}\cos\theta_t$$

D'où les coefficients de réflexion et transmission de la surpression

$$r_p = \frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_2\cos\theta_i - Z_1\cos\theta_t}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_i} \text{ et } t_p = \frac{A_t}{A_i} = \frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t} \tag{35}$$

et les facteurs de réflexion et transmission de la puissance acoustique

$$R = \frac{|P_r|}{|P_i|} = |r_p|^2 \text{ et } T = 1 - R \tag{36}$$

4.5.4 Incidence oblique pour une onde plane harmonique (suite)