

Ondes élastiques guidées

PAR VINCENT LAUDE

Institut FEMTO-ST, Département MN2S
équipe MINANO

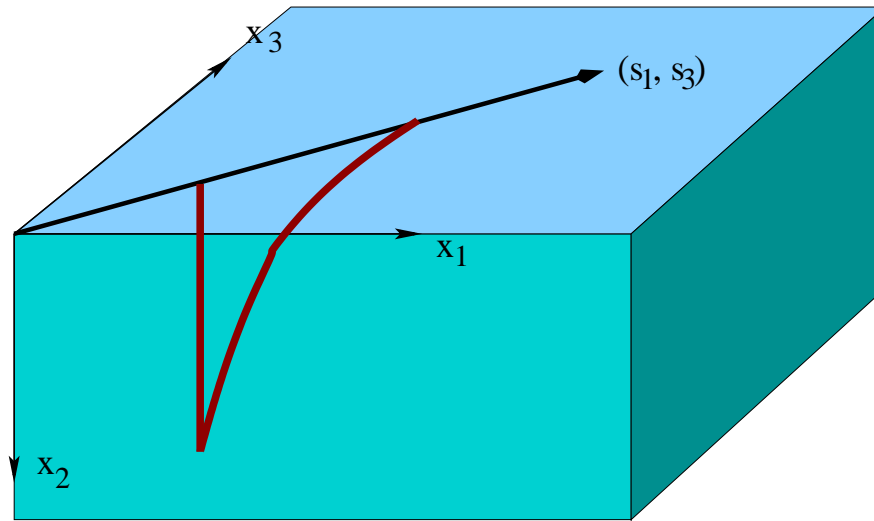
« Micro-Instrumentation, NANosciences et Ondes »
32 avenue de l'Observatoire F-25044 Besançon

Email: `vincent.laude@femto-st.fr`

Toile: `http://members.femto-st.fr/vincent-laude/`

1 Ondes de surface

Une onde de surface est une solution de l'équation d'onde qui respecte les conditions aux limites sur la surface d'un milieu semi-infini surmonté du vide. Elle est guidée si son amplitude décroît dans la profondeur.



On suppose imposer la lenteur en surface (le vecteur d'onde), soit s_1 et s_3 . Seules les ondes partielles réfléchies peuvent participer à l'onde de surface (soit 3 ondes partielles pour un solide élastique et 4 pour un solide piézoélectrique).

Conditions aux limites élastiques : pour une surface libre, $T_{i2} = 0$.

Conditions aux limites électriques (cas piézoélectrique) : pour une surface libre, pas de charges à la surface ; pour une surface métallisée et court-circuitée (film métallique infiniment mince), $\phi = 0$.

1.1 Règle de sélection des modes partiels (réfléchis)

Règle : On étudie les courbes de lenteur dans le plan sagittal (normal à la surface et contenant la direction de propagation).

- Un mode partiel propagatif (s_2 réelle) est sélectionné si le vecteur de Poynting rentre vers l'intérieur du substrat, soit $P_2 > 0$.
- Un mode inhomogène est sélectionné si $\text{Im}(s_2) < 0$, de sorte que l'amplitude du mode partiel décroisse dans le substrat.

On reclasse les modes partiels réfléchis de 1 à 3 (élastique seul) ou 4 (piézoélectrique).

Forme de la solution : superposition des modes partiels réfléchis

$$\mathbf{h}(t, \mathbf{x}) = \left(\sum_{r=1}^{3 \text{ ou } 4} a_r \mathbf{h}_r \exp \left(-i\omega s_{2r} x_2 \right) \right) \exp (i\omega (t - s_1 x_1 - s_3 x_3)) \quad (1)$$

avec $h_l = (u_l, \tau_{l2})$ le vecteur des déplacements et contraintes généralisés, s_{2r} et \mathbf{h}_r les valeurs et vecteurs propres caractérisant les modes partiels, et a_r les amplitudes des modes partiels dans la superposition.

1.2 Cas des milieux solides non piézoélectriques

Expression du déterminant des conditions aux limites $T_{i2} = 0$ pour $x_2 = 0$. Il y a 3 conditions aux limites pour 3 amplitudes inconnues :

$$\tau_{i2} = \sum_{r=1}^3 a_r \tau_{i2}^{(r)} = 0, \quad i=1, 2, 3 \quad (2)$$

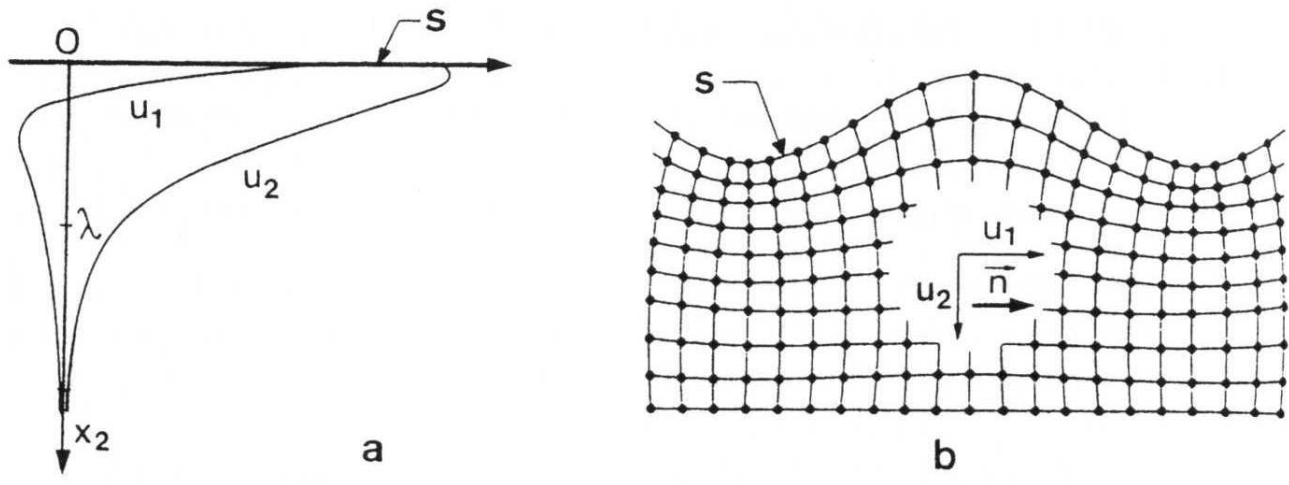
Il existe une solution ssi le déterminant des conditions aux limites est nul, soit

$$\Delta = |\tau_{i2}^{(r)}| = \begin{vmatrix} \tau_{12}^{(1)} & \tau_{12}^{(2)} & \tau_{12}^{(3)} \\ \tau_{22}^{(1)} & \tau_{22}^{(2)} & \tau_{22}^{(3)} \\ \tau_{32}^{(1)} & \tau_{32}^{(2)} & \tau_{32}^{(3)} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

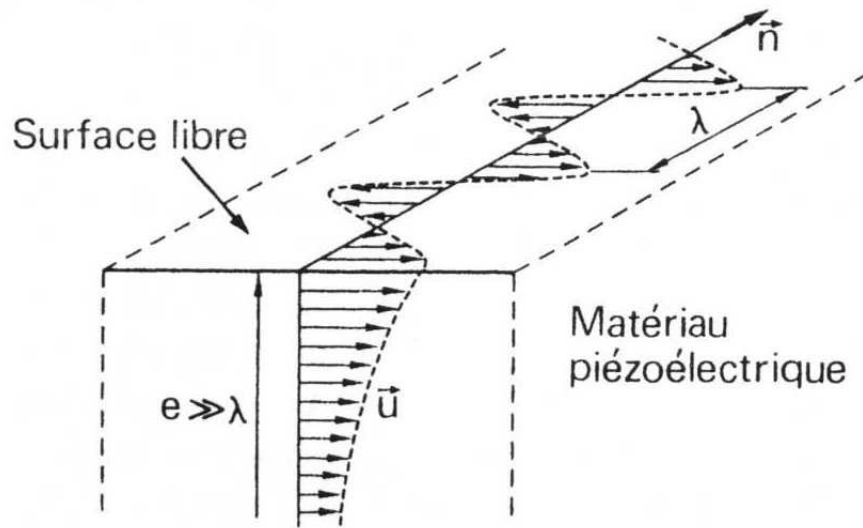
Le déterminant est fonction de s_1 et s_3 (des lenteurs de surface). Cette équation définit une courbe de lenteur. L'onde de surface est parfaitement guidée si tous les modes partiels sont inhomogènes : la vitesse de l'onde de surface est alors nécessairement plus petite que celles des ondes volume.

On considère les plus souvent les ondes de Rayleigh, dont la polarisation (les déplacements) est purement sagittale. Les ondes de Bleustein-Gulyaev (seulement dans le cas piézoélectrique) sont de polarisation transverse pure.

1.3 Ondes de Rayleigh et de Bleustein-Gulyaev

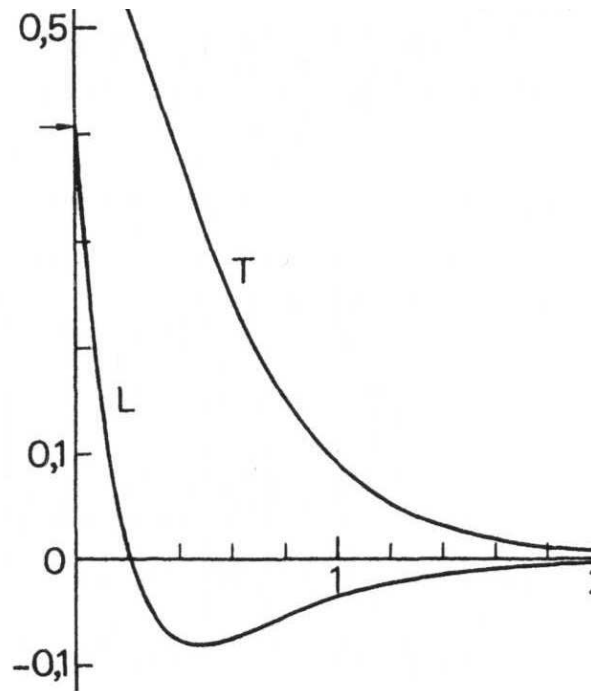


Onde de Rayleigh (R)

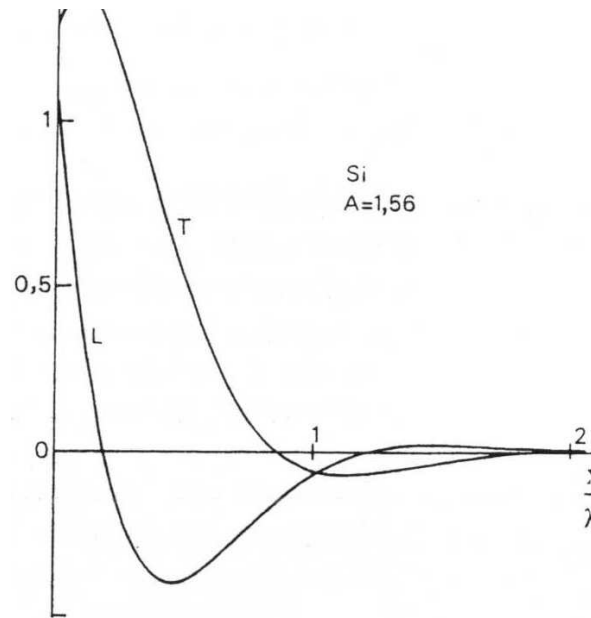


Onde de Bleustein-Gulyaev (BG)

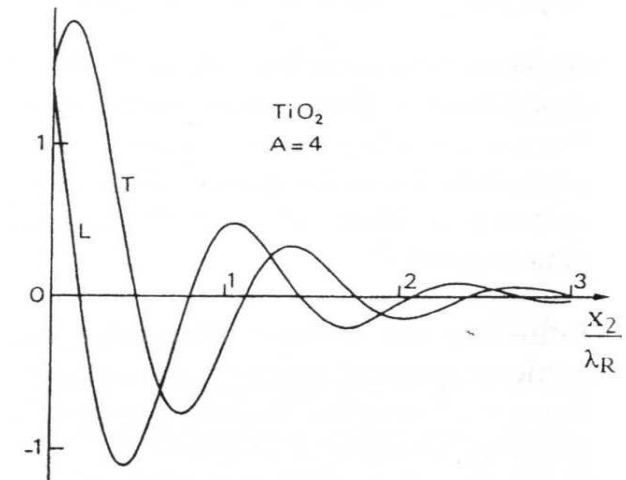
1.4 Exemples d'ondes de Rayleigh



Silice
(isotrope)

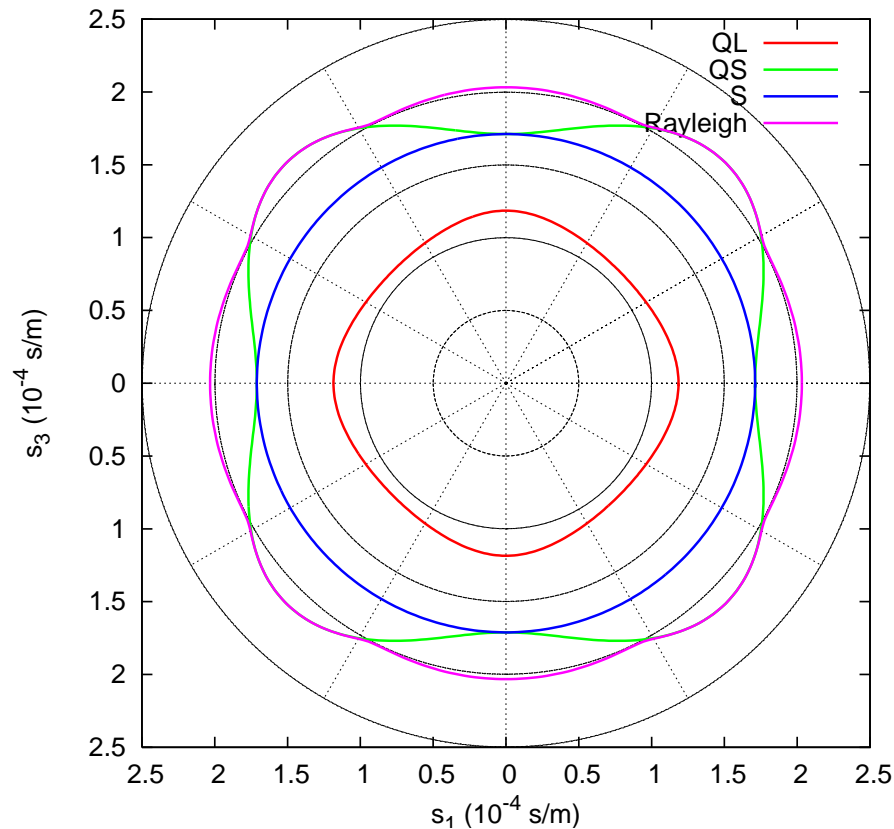


Silicium
(plan (010), prop. [100])

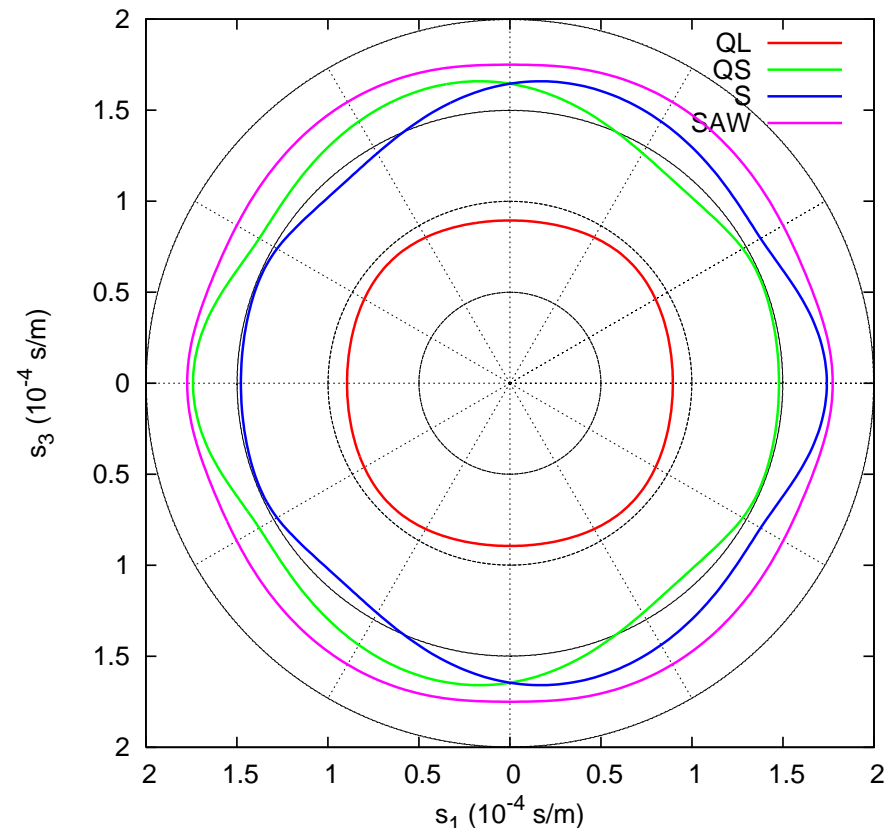


TiO₂
(plan (010), prop. [100])

1.5 Courbes de lenteur pour le silicium et le rutile



Silicium, coupe Z ou plan (001)
Onde de surface de type Rayleigh



Corindon, coupe Y ou plan (010)
Onde de surface de polarisation générale

1.6 Cas piézoélectrique

Surface libre Il y a maintenant 4 modes partiels réfléchis. Il n'y a pas de charges accumulées sur la surface, soit $\Delta D_2 = 0$ (le déplacement électrique est continu).

Côté vide, le potentiel satisfait l'équation de Poisson $s_i s_i \phi = 0$, d'où (le signe choisi assure que la solution est évanescence dans le vide) $s_2 = +i \sqrt{s_1^2 + s_3^2}$.

La composante normale du déplacement électrique à la surface $x_2 = 0$ est donc $D_2 = -s_2 \varepsilon_0 \phi = -i \sqrt{s_1^2 + s_3^2} \varepsilon_0 \phi$.

En plus des tensions mécaniques nulles (2), on a à la surface $x_2 = 0$

$$D_2 + i s \varepsilon_0 \phi = 0 \text{ en posant } s = \sqrt{s_1^2 + s_3^2}$$

D'où le déterminant des conditions aux limites

$$\Delta_L = \begin{vmatrix} \tau_{12}^{(1)} & \tau_{12}^{(2)} & \tau_{12}^{(3)} & \tau_{12}^{(4)} \\ \tau_{22}^{(1)} & \tau_{22}^{(2)} & \tau_{22}^{(3)} & \tau_{22}^{(4)} \\ \tau_{32}^{(1)} & \tau_{32}^{(2)} & \tau_{32}^{(3)} & \tau_{32}^{(4)} \\ D_2^{(1)} + i s \varepsilon_0 \phi^{(1)} & D_2^{(2)} + i s \varepsilon_0 \phi^{(2)} & D_2^{(3)} + i s \varepsilon_0 \phi^{(3)} & D_2^{(4)} + i s \varepsilon_0 \phi^{(4)} \end{vmatrix} \quad (4)$$

$\Delta_L = 0$ est la condition d'existence de l'onde de surface.

Surface métallisée court-circuitée En plus des tensions mécaniques nulles (2), le potentiel est nul en $x_2 = 0$:

$$\phi = \sum_{r=1}^4 a_r \phi^{(r)} = 0 \quad (5)$$

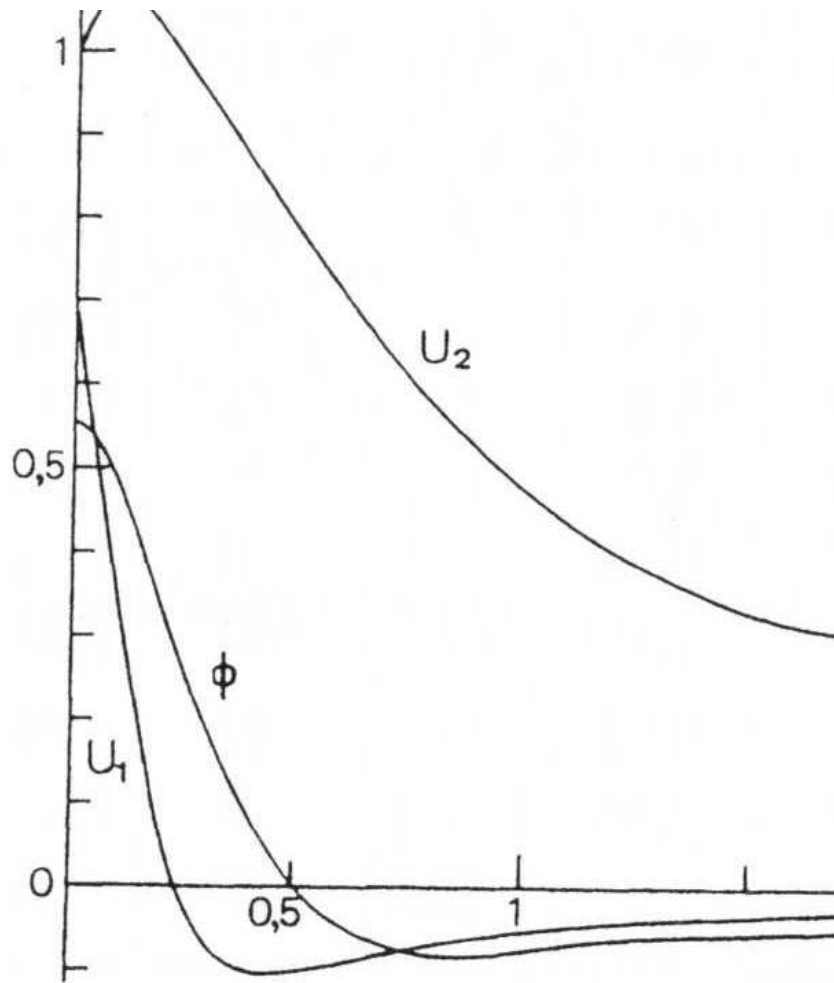
Le déterminant des conditions aux limites devient donc

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} \tau_{12}^{(1)} & \tau_{12}^{(2)} & \tau_{12}^{(3)} & \tau_{12}^{(4)} \\ \tau_{22}^{(1)} & \tau_{22}^{(2)} & \tau_{22}^{(3)} & \tau_{22}^{(4)} \\ \tau_{32}^{(1)} & \tau_{32}^{(2)} & \tau_{32}^{(3)} & \tau_{32}^{(4)} \\ \phi^{(1)} & \phi^{(2)} & \phi^{(3)} & \phi^{(4)} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

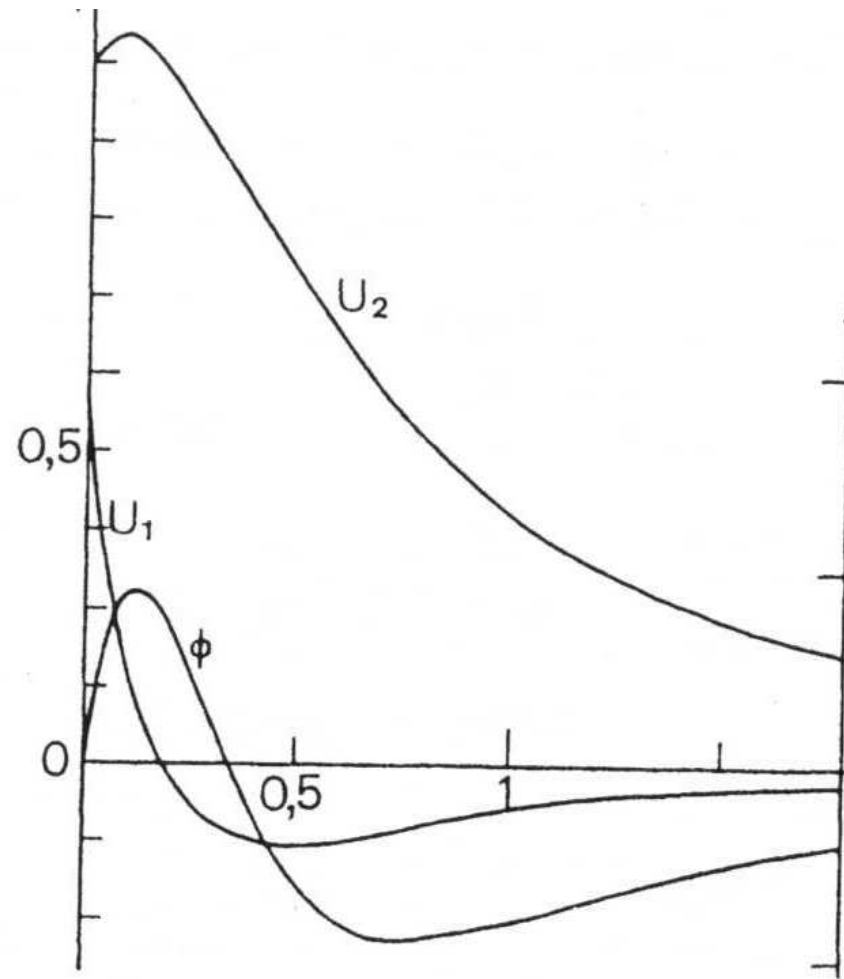
Couplage Les déterminants des conditions aux limites Δ_L et Δ_M donnent chacun une courbe lenteur pour l'onde de surface. La lenteur sur surface métallisée est toujours plus grande que sur surface libre (la vitesse plus petite). Le couplage électromécanique est toujours donné approximativement par

$$K^2 = 2 \frac{\Delta v}{v} = 2 \frac{\Delta s}{s}$$

1.7 Exemple : niobate de lithium (coupe Y, propagation Z)

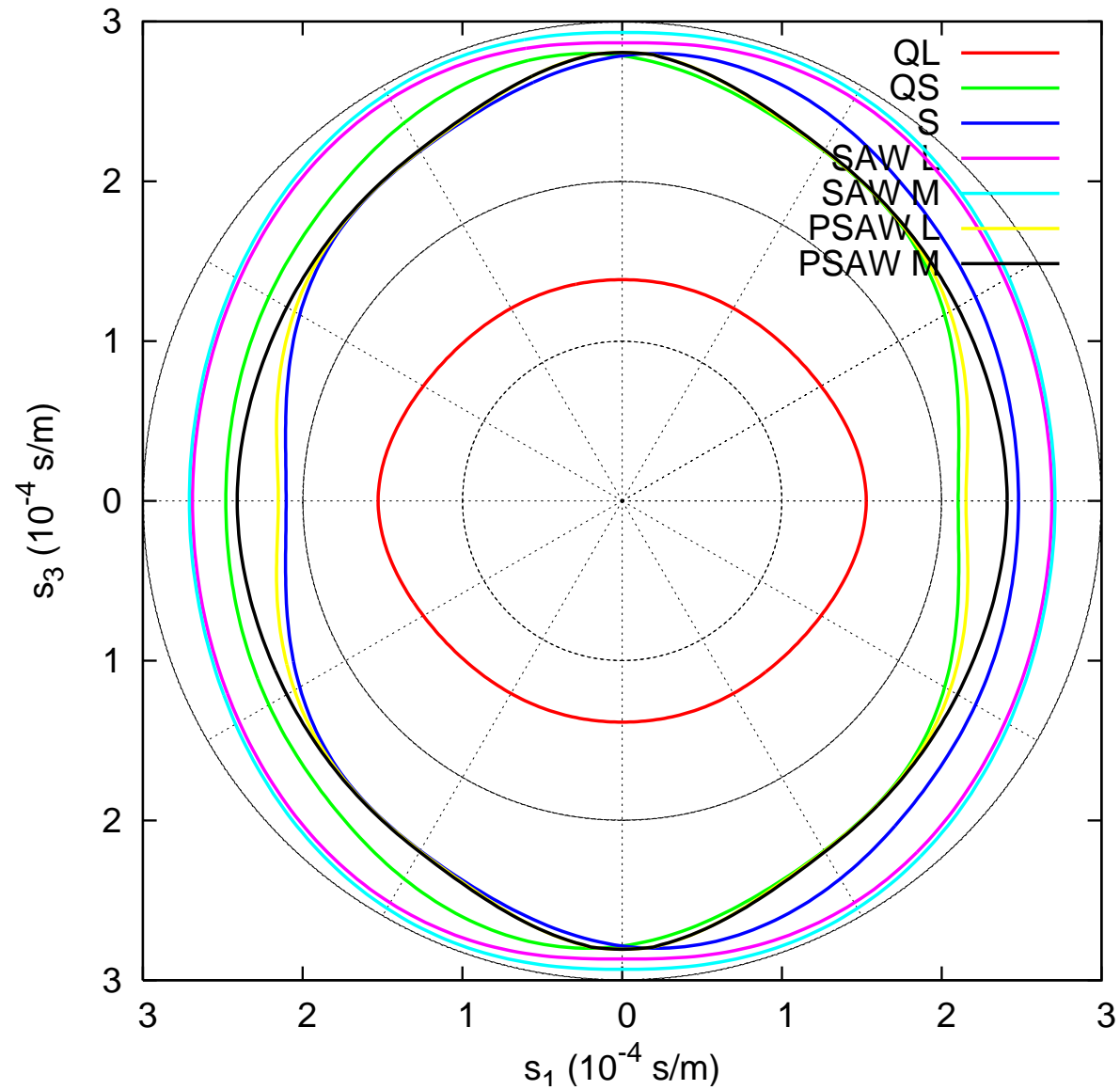


surface libre



surface métallisée en court-circuit

1.8 Courbes de lenteur pour le niobate de lithium coupe Y



1.9 Fonction de Green et permittivité effective de surface

Fonction de Green spectrale Quelles que soient les conditions aux limites en surface, le nombre de lignes de la relation (1) est le double du nombre de modes partiels ; on élimine les amplitudes pour obtenir la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{22} \\ \tau_{32} \\ \frac{D_2}{-i\omega} \end{pmatrix} \text{ avec la matrice de Green } G = \begin{pmatrix} \bar{u}_i^{(r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{i2}^{(r)} \end{pmatrix}^{-1} \quad (7)$$

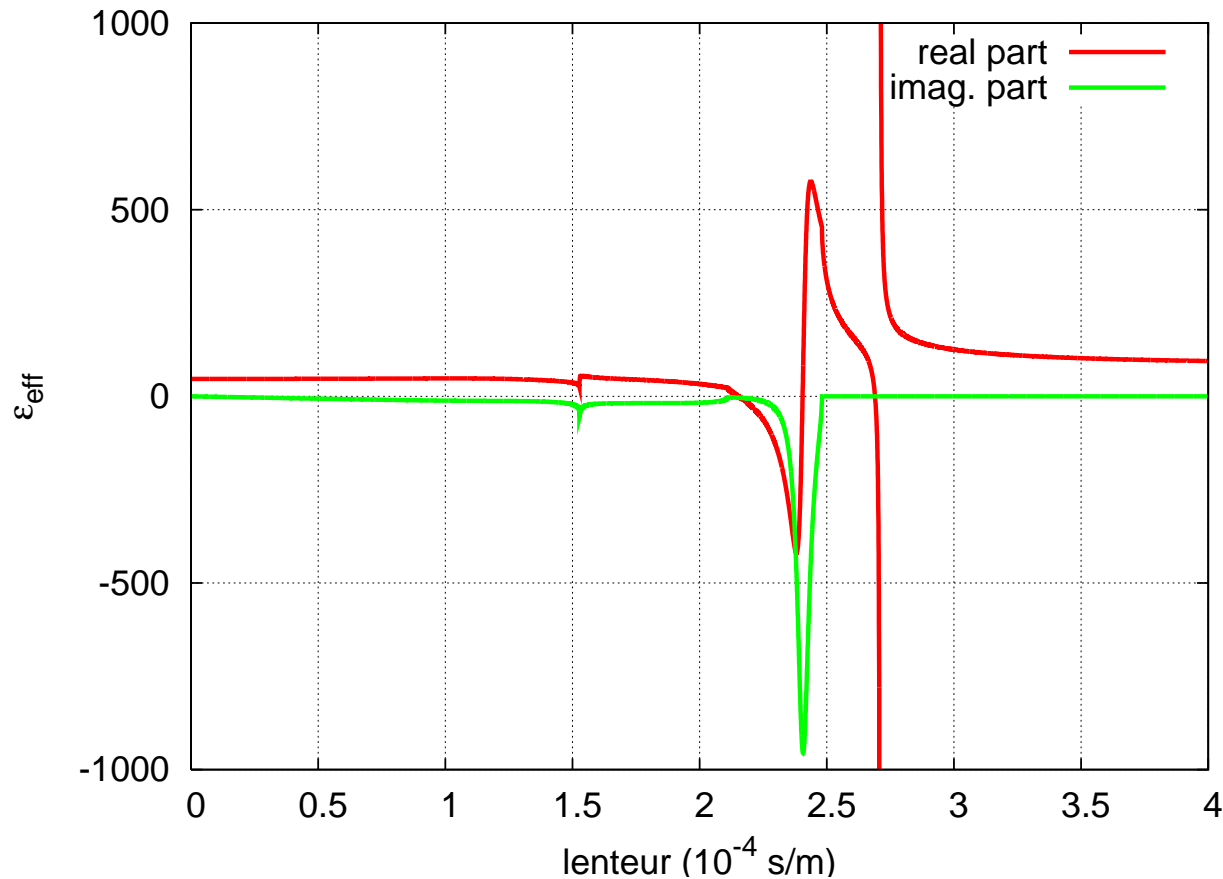
Cette relation permet de considérer une forme d'excitation quelconque dans les simulations numériques (cf. cours suivant).

Permittivité effective de surface Quand la surface est libre mécaniquement, les contraintes normales à la surface sont nulles et $\phi = G_{44} \frac{D_2}{-i\omega}$. On définit

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{D_2}{E_{\text{longitudinal}}} = \frac{D_2}{-\omega s \phi} = \frac{i}{s G_{44}} \quad (8)$$

Les pôles de cette fonction donnent les ondes pour une surface en court-circuit, les ondes sur une surface libre sont données par $\varepsilon_{\text{eff}} = -\varepsilon_0$.

1.10 Pseudo-ondes de surface (PSAW)



← niobate Y, prop. X

Quand le déterminant des conditions aux limites est presque nul, on obtient une onde partiellement guidée par la surface (onde à pertes par rayonnement dans le substrat). En pratique, ces ondes sont très importantes car on peut obtenir des pertes limitées avec des couplages électromécaniques très importants.

1.11 Exemples d'ondes de surface utilisées en pratique

Cristal	Coupe	Direction	Type	v_M (m/s)	α (dB/ λ)	K^2 (%)	$\frac{\varepsilon_\infty}{\varepsilon_0}$
LiNbO ₃	Y	Z	R	3390	0	4.5	46
LiNbO ₃	Y+128	X	SAW	3870	0	5	56
LiNbO ₃	Y+128	X	BG	4030	0	$2.5 \cdot 10^{-4}$	56
LiNbO ₃	Y+41	X	PSAW	4380	$2 \cdot 10^{-2}$	16	63
LiTaO ₃	Y	Z	R	3210	0	0.9	48
LiTaO ₃	Y+36	X	PSAW	4110	$3 \cdot 10^{-4}$	5.5	50
Quartz	Y+42	X	SAW	3158	0	0.11	6
ZnO	X	Y	BG	2823	0	0.5	10

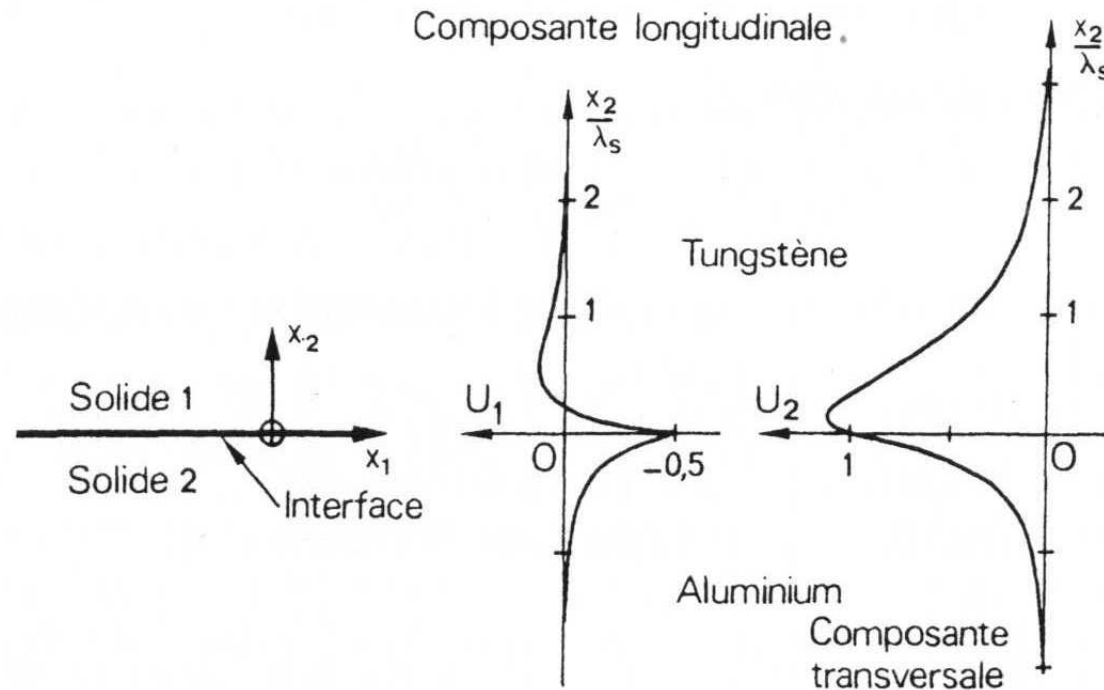
Tableau 1. Caractéristiques des ondes de surface sur quelques coupes cristallines.

Type d'onde	Polarisation
Rayleigh (R)	sagittale
Rayleigh généralisée (SAW)	principalement sagittale
Bleustein-Gulyaev (BG)	une seule composante purement transverse
Pseudo SAW (PSAW)	onde à pertes par rayonnement

Tableau 2. Classification des ondes de surface.

2 Ondes d'interface

Une onde d'interface est un mode guidé par l'interface entre 2 matériaux. Elle est guidée sans pertes si son amplitude décroît exponentiellement des deux côtés de l'interface. L'intérêt des ondes d'interface est pour l'heure plus théorique que pratique, mais elles permettent en principe de réaliser des composants dont l'interface active est protégée (encapsulée).



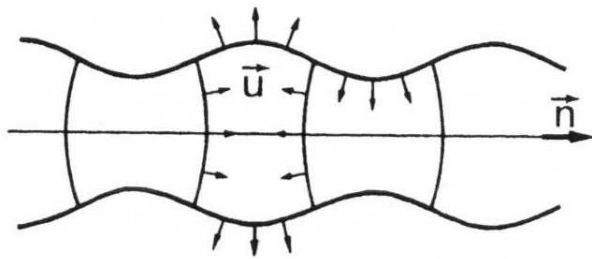
On étend les notions introduites pour les ondes de surface : déterminants des conditions aux limites, fonction de Green, permittivité effective d'interface, etc.

3 Modes de plaque

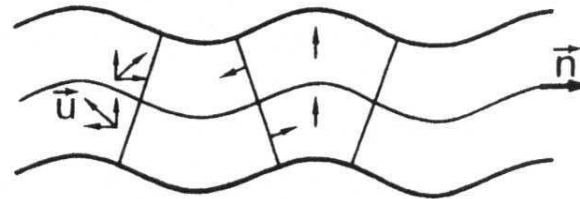
Pour une plaque, il faut considérer les conditions aux limites sur les deux surfaces simultanément.

Il existe des ondes de volume, des ondes de surface si l'épaisseur de la plaque est très grande devant la longueur d'onde, plus des modes de plaque proprement dits.

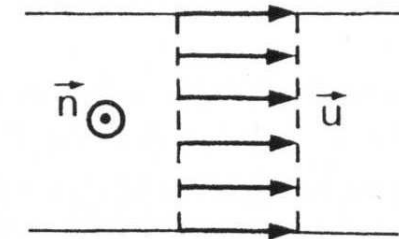
Ondes de Lamb : modes de plaque pour un matériau isotrope.



Mode symétrique



Mode antisymétrique

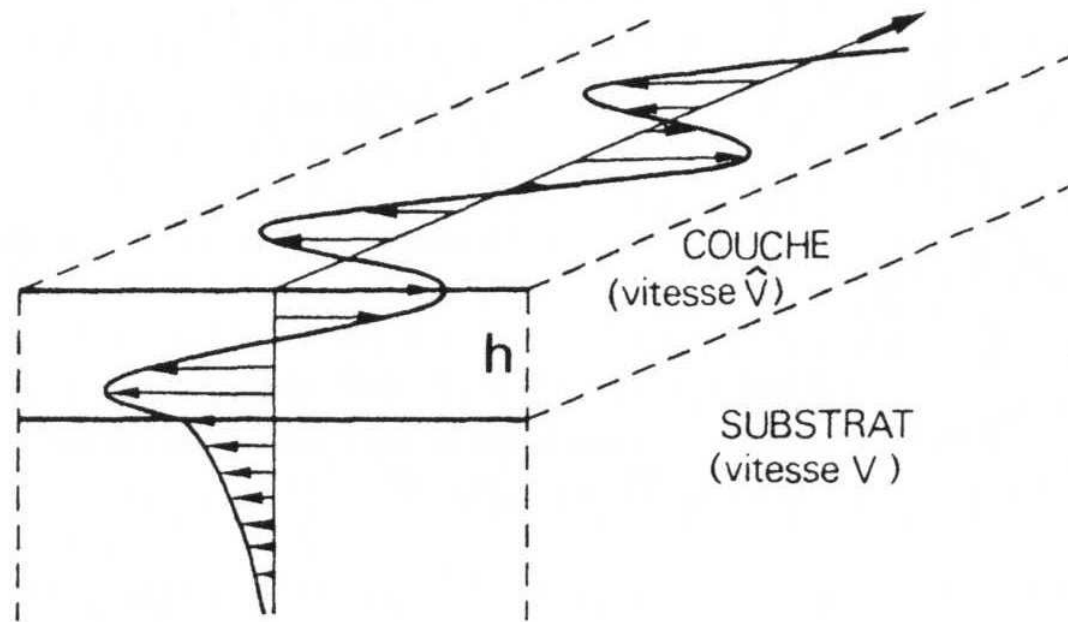


Mode purement transverse

4 Modes d'un multicouche

Pour un empilement de couches (minces ou épaisses) il existe des modes de volume, de surface, d'interface, de plaque et des modes de l'empilement proprement dit. Le calcul utilise toujours la notion de modes partiels, des conditions de continuité entre les couches et la prise en compte des conditions aux limites.

Dans le cas d'une couche isotrope sur un substrat semi-infini isotrope, les ondes purement transversales évanescentes dans le substrat sont appelées **ondes de Love**.



5 Modes d'une fibre (cylindre) par éléments finis

Une fibre est définie par sa section et est supposée infiniment longue. On maille la section de la fibre par des éléments finis triangulaires (à 6 noeuds dans les exemples suivants) et on utilise des polynômes de Lagrange d'ordre 2 pour l'approximation des déplacements.

La polarisation des modes guidés par la fibre est de la forme :

$$u_i(t, x, y, z) = p(x, y) \exp(i(\omega t - kz)) \quad (9)$$

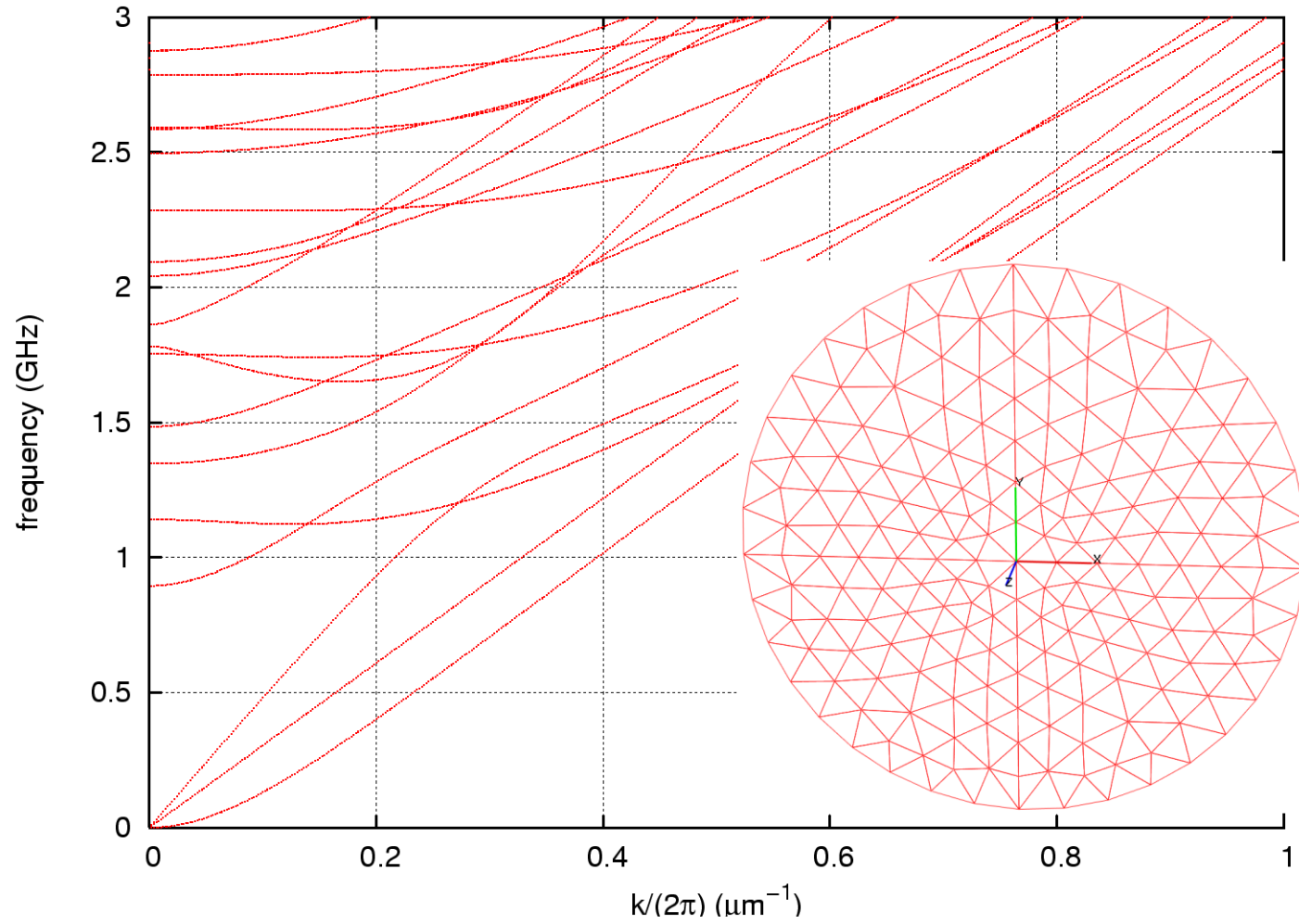
où $p(x, y)$ est l'approximation polynomiale à l'intérieur des éléments finis, ω est la fréquence angulaire et k est le vecteur d'onde longitudinal.

L'écriture du problème variationnel sur les éléments finis conduit à l'équation aux valeurs propres

$$(K(k) - \omega^2 M) \mathbf{u} = 0 \quad (10)$$

avec $K(k)$ la matrice de raideur, M la matrice de masse et \mathbf{u} le vecteur des déplacements nodaux. Les modes guidés sont les vecteurs propres pour les valeurs propres ω^2 . Le caractère défini positif des matrices de masse et de raideur garantit que $\omega^2 > 0$.

5.1 Exemple : fibre circulaire pleine (aluminium, diam. 1 μm)



5.2 Exemple : fibre circulaire trouée (aluminium, diam. 1 μm)

