

Physique des dispositifs à ondes élastiques

VINCENT LAUDE

ENSMM, Master ELO
année scolaire 2005-2006

Table des matières

Table des matières	3
1 Introduction	7
1.1 Introduction aux ondes élastiques	7
1.2 Elasticité	7
1.3 Quels sont les types d'ondes élastiques ?	8
1.3.1 Ondes longitudinales ou P (de pression)	8
1.3.2 Ondes transverses ou S (shear wave)	8
1.3.3 Ondes de surface de type Rayleigh ou R	9
1.3.4 Ondes de surface de polarisation transverse	9
1.4 Tremblements de terre	9
1.5 Applications des ondes dans les fluides ?	10
1.5.1 Le sonar	10
1.5.2 Echographie médicale	10
1.6 Applications des ondes dans les solides ?	11
1.6.1 Contrôle non destructif	11
1.6.2 Ondes élastiques de surface (<i>surface acoustic waves</i>)	11
1.6.3 Capteurs à ondes de surface	12
1.6.4 Résonateurs à ondes de volume	12
1.6.5 Résonateurs à films minces (FBAR)	12
1.6.6 Cristaux phononiques	13
2 Modèle scalaire des ondes - le cas des fluides	15
2.1 Modèle unidimensionnel (1D)	15
2.1.1 Equation d'onde	15
2.1.2 Solution générale ?	15
2.1.3 Spectre d'ondes planes	15
2.1.4 Dispersion et vitesse de groupe	16
2.1.5 Exemples de dispersions et leur influence	16
2.1.6 Fonction de Green 1D	17
2.2 Ondes acoustiques 1D	17
2.2.1 Descriptions lagrangienne et eulérienne	17
2.2.2 Relation entre pression et déplacement	17
2.2.3 Vitesse du son	18
2.2.4 Impédance acoustique	18
2.2.5 Représentation des pertes de propagation ?	19
2.3 Modèle tridimensionnel des ondes (3D)	19
2.3.1 Equation d'onde 3D	19
2.3.2 Onde plane et onde plane harmonique	20
2.3.3 Spectre d'ondes planes	20
2.3.4 Dispersion temporelle et spatiale	21
2.3.5 Réflexion totale d'une onde plane - incidence normale	21
2.3.6 Guidage des ondes entre deux miroirs plans	21
2.4 Ondes acoustiques 3D	22
2.4.1 Relations entre pression et déplacements	22
2.4.2 Equation d'onde acoustique 3D	22
2.4.3 Flux de puissance et vecteur de Poynting	23
2.4.4 Relations énergétiques pour les ondes planes	23

2.4.5	Réflexion et réfraction	23
2.4.5.1	Conditions aux limites	23
2.4.5.2	Incidence normale pour une onde plane	24
2.4.5.3	Incidence oblique pour une onde plane harmonique	24
2.5	Rayonnement acoustique 3D	25
2.5.1	Notion de fonction de Green isotrope 3D	25
2.5.2	Rayonnement monochromatique d'une sphère	26
2.5.3	Rayonnement d'une surface - intégrale de Rayleigh	26
2.5.4	Cas du disque plan - sur l'axe	27
2.5.5	Cas du disque plan - champ lointain	28
2.5.6	Réponse impulsionnelle	28
3	Cristaux, tenseurs, élasticité & piézoélectricité	29
3.1	Description des cristaux	29
3.1.1	Propriétés	29
3.1.2	Réseau cristallin	29
3.1.3	Rangées	30
3.1.4	Plans réticulaires	30
3.1.5	Mailles	31
3.1.6	Motif	31
3.2	Symétrie d'orientation	32
3.2.1	Les 14 réseaux de Bravais	32
3.2.2	Les 32 classes de symétrie ponctuelle des cristaux	32
3.3	Exemples de structures	33
3.3.1	Structure hexagonale compacte	33
3.3.2	Structure cubique compacte (cfc)	34
3.3.3	ZnO, AlN, CdS : système hexagonal de symétrie 6mm	34
3.3.4	LiNbO ₃ et LiTaO ₃ : système trigonal de symétrie 3m	34
3.4	Introduction aux tenseurs	34
3.4.1	Relations linéaires dans un milieu anisotrope	34
3.4.2	Matrice de changement d'axes de référence	35
3.4.3	Définition d'un tenseur	35
3.5	Elasticité	35
3.5.1	Déformations	35
3.5.2	Contraintes	36
3.5.3	Loi de Hooke	36
3.5.4	Notation contractée (ou matricielle)	37
3.6	Piézoélectricité	38
3.6.1	Origine physique de la piézoélectricité	38
3.6.2	Relations constitutives	38
3.6.3	Approximation quasi-statique	38
3.6.4	Représentation matricielle des relations constitutives	38
3.6.5	Conditions aux limites	40
3.6.6	Théorème de Poynting et bilan énergétique	41
4	Ondes planes dans les solides	43
4.1	Rappels sur les problèmes aux valeurs propres	43
4.2	Solide anisotrope non piézoélectrique	43
4.2.1	Equation de Christoffel	43
4.2.2	Cas isotrope	44
4.2.3	Exemples pour un cristal cubique	44
	Propagation suivant [1,0,0] -	44
	Propagation suivant [1,1,0] -	44
4.2.4	Lenteur, vitesse de phase et vitesse d'énergie	44
4.3	Surfaces caractéristiques	45

4.3.1	Surface des lenteurs	45
4.3.2	Surface d'onde	45
4.3.3	Surface des vitesses	45
4.3.4	Exemple : silicium (Si, cubique $m\bar{3}m$)	46
4.3.5	Exemple : rutile (TiO_2 , tétragonal $4/m\bar{m}m$)	46
4.3.6	Exemple : corindon, saphir, rubis (Al_2O_3 , trigonal $\bar{3}m$)	47
4.3.7	Atténuation	47
4.4	Solide anisotrope piézoélectrique	47
4.4.1	Constantes durcies pour les ondes planes harmoniques	47
4.4.2	Couplage électromécanique	48
4.4.3	ZnO (hexagonal $6mm$)	48
4.4.4	Quartz (trigonal 32)	49
4.4.5	LiNbO_3 (trigonal $3m$)	49
4.5	Réflexion et réfraction	49
4.5.1	Propriétés générales	49
4.5.2	Exemple : interface silicium - silice	50
4.5.3	Déplacements et contraintes généralisés	50
4.5.4	Equation aux valeurs propres	51
4.5.5	Exemple : modes partiels propagatifs et inhomogènes du rutile	51
4.5.6	Exemple : modes partiels propagatifs et inhomogènes du LiNbO_3	52
4.5.7	Méthode de solution numérique	52
4.5.8	Exemple : interface silicium - silice, et réciproquement	53
4.5.9	Exemple : interface duralumin - eau, et réciproquement	53
5	Ondes élastiques guidées	55
5.1	Ondes de surface	55
5.1.1	Règle de sélection des modes partiels (réfléchis)	56
5.1.2	Cas des milieux solides non piézoélectriques	56
	Expression du déterminant des conditions aux limites	56
5.1.3	Ondes de Rayleigh et de Bleustein-Gulyaev	57
5.1.4	Exemples d'ondes de Rayleigh	57
5.1.5	Courbes de lenteur pour le silicium et le rutile	58
5.1.6	Cas piézoélectrique	58
	Surface libre	58
	Surface métallisée court-circuitée	58
	Couplage	58
5.1.7	Exemple : niobate de lithium (coupe Y, propagation Z)	59
5.1.8	Courbes de lenteur pour le niobate de lithium coupe Y	59
5.1.9	Fonction de Green et permittivité effective de surface	59
	Fonction de Green spectrale	59
	Permittivité effective de surface	60
5.1.10	Pseudo-ondes de surface (PSAW)	60
5.1.11	Exemples d'ondes de surface utilisées en pratique	60
5.2	Ondes d'interface	61
5.3	Modes de plaque	61
5.4	Modes d'un multicouche	61
5.5	Modes d'une fibre (cylindre) par éléments finis	62
5.5.1	Exemple : fibre circulaire pleine (aluminium, diam. $1\ \mu\text{m}$)	62
5.5.2	Exemple : fibre circulaire trouée (aluminium, diam. $1\ \mu\text{m}$)	63
6	Exemples de dispositifs à ondes élastiques	65
6.1	Transducteurs d'ondes planes acoustiques	65
6.1.1	Principes	65
6.1.2	Exemple d'un transducteur d'ondes planes longitudinales	65
6.1.2.1	Forme de la solution	66

6.1.2.2	Réponse du transducteur	66
6.1.2.3	Illustration numérique	67
6.1.3	Transducteurs piézocomposites	67
6.1.4	Transducteurs micro-usinés (MUT)	68
6.1.5	Résonateurs à films minces (FBAR)	69
6.2	Dispositifs à ondes acoustiques de surface	69
6.2.1	Architecture de réception RF	70
6.2.2	Le principe du peigne interdigité (IDT)	70
6.2.3	Notion de retard (vitesse et temps de groupe)	71
6.2.4	Couplage électroacoustique et largeur de bande	71
6.2.5	Structure classique des filtres SAW	72
6.2.6	Filtres SAW à réponse impulsionnelle infinie	72
6.2.7	Structures de filtres et nombre de pôles	73
6.2.8	Couplage transverse de résonateurs SAW	73
6.2.9	Structure de filtre SAW en échelle (<i>ladder</i>)	74
6.2.10	Simulation numérique des dispositifs SAW	75
6.2.10.1	Contribution électrostatique	75
6.2.10.2	Propagation des SAW dans un réseau d'électrodes	76
6.2.10.3	Simulation numérique FEM/BEM	76
6.2.10.4	Méthodes matricielles mixtes électrique / acoustique	77
6.2.11	Fabrication des dispositifs à ondes de surface	78

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction aux ondes élastiques

Qu'est ce qu'une onde ?

Plusieurs attitudes sont possibles pour définir ce concept relativement flou :

- *Réponse 1 (traitement du signal)* : c'est un modèle (mathématique) pour décrire la propagation d'un signal à longue distance au cours du temps. Peu importe ce que c'est vraiment, c'est l'information (le signal) porté par l'onde qui est importante.
- *Réponse 2 (mathématiques appliquées)* : une onde est une solution d'une équation d'onde, équation elliptique aux dérivées partielles en temps et espace. L'important est de déterminer les solutions de l'équation et leurs conditions d'existence.
- *Réponse 3 (physique)* : c'est une perturbation propagative de l'équilibre d'un milieu ou d'un matériau. Placé localement et temporairement hors d'équilibre, le milieu réagit pour revenir à l'état qu'il préfère : le repos ! La perturbation se propage de proche en proche. Le plus simple est de considérer que la perturbation est faible, donc que la réaction est élastique, et de négliger dans un premier temps les nonlinéarités.

Dans le cadre de ce cours, c'est l'attitude physique qui nous intéresse le plus, mais on ne peut négliger les deux autres !

1.2 Élasticité

Le modèle le plus simple du comportement élastique d'un milieu soumis à une déformation est celui du ressort.

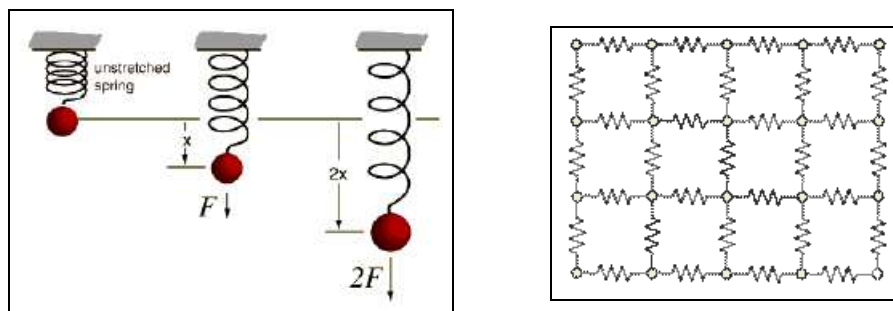


Figure 1.1. Modèles 1D et 2D.

1.3 Quels sont les types d'ondes élastiques ?

1.3.1 Ondes longitudinales ou P (de pression)

Elles se propagent dans un milieu homogène : ce sont des ondes de volume. Elles existent dans tous les milieux (fluides et solides). Ce sont des ondes de compression (la variation de surpression est liée à une variation de volume) ou encore des ondes de polarisation longitudinale (déplacements dans le sens de la propagation).

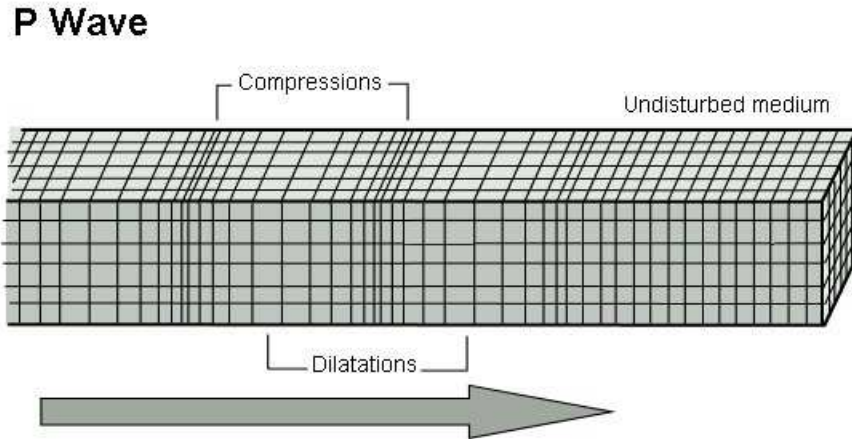


Figure 1.2. Représentation schématique des déplacements au cours de la propagation d'une onde élastique de polarisation longitudinale.

1.3.2 Ondes transverses ou S (shear wave)

Elles se propagent dans un milieu homogène : ce sont des ondes de volume.

Elles n'existent pas dans les fluides non visqueux (donc idéalement ni dans l'eau ni dans l'air). Il en existe toujours deux dans les solides, qui peuvent être dégénérées (dégénérées = même direction de propagation, même vitesse, mais polarisations orthogonales). Le déplacement n'est pas lié à une variation de volume.

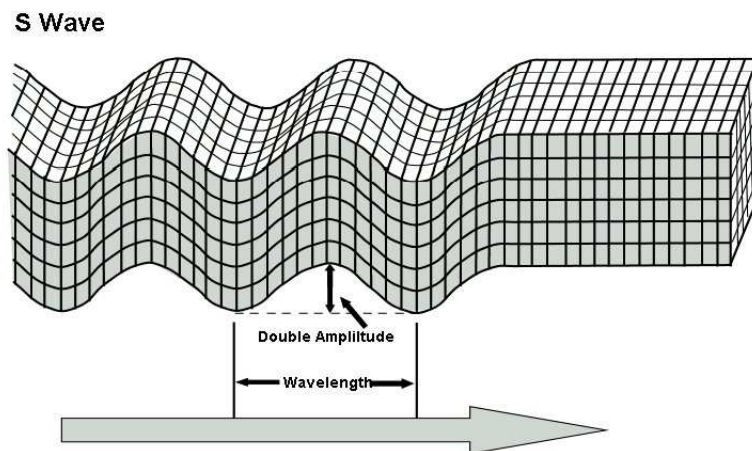


Figure 1.3. Représentation des déplacements au cours de la propagation d'une onde élastique de polarisation transverse.

1.3.3 Ondes de surface de type Rayleigh ou R

Les ondes de surface se propagent à la surface d'un milieu ou à l'interface entre deux milieux (ondes d'interface).

Elles existent dans les fluides, notamment dans l'eau (par exemple les vagues !) et aussi dans les solides. La polarisation (les déplacements) est (majoritairement) elliptique. Le déplacement est lié à une variation de volume.

L'amplitude des déplacements décroît exponentiellement dans la profondeur.

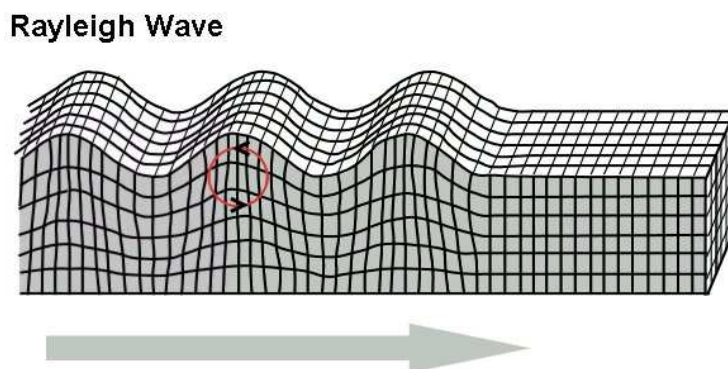


Figure 1.4. Représentation des déplacements au cours de la propagation d'une onde élastique de surface de type Rayleigh (polarisation elliptique).

1.3.4 Ondes de surface de polarisation transverse

Elles se propagent à la surface d'un milieu ou à l'interface entre deux milieux (ondes d'interface). On parle d'onde de Love en sismologie (ce qui désigne un mode de polarisation transverse d'un substrat composite en ultrasonique). La polarisation est purement transverse. Le déplacement n'est pas lié à une variation de volume. L'amplitude des déplacements décroît exponentiellement dans la profondeur.

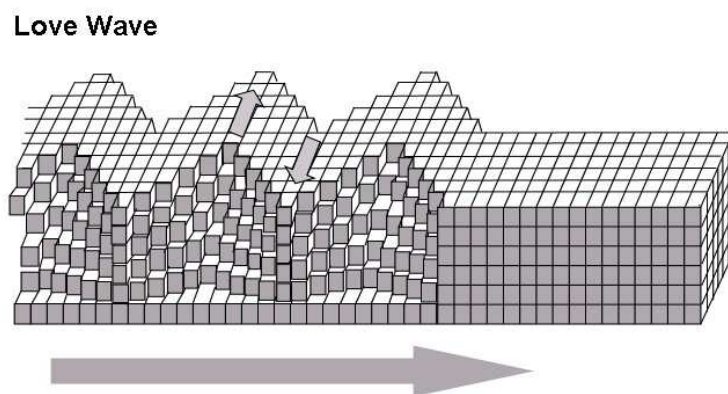


Figure 1.5. Représentation des déplacements au cours de la propagation d'une onde élastique de surface de polarisation transverse.

1.4 Tremblements de terre

En sismologie, on étudie les ondes élastiques se propageant dans l'écorce terrestre. Les ondes transverses (de cisaillement) créent les plus gros dégâts...

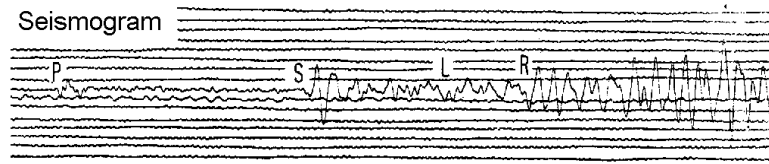


Figure 1.6. Séismogramme montrant quatre types d'ondes arrivant successivement.

1.5 Applications des ondes dans les fluides ?

1.5.1 Le sonar

Le sonar est une technique apparentée au Radar pour la détection sous-marine. Il utilise des fréquences acoustiques relativement basses, ce qui limite la résolution spatiale mais augmente la portée.

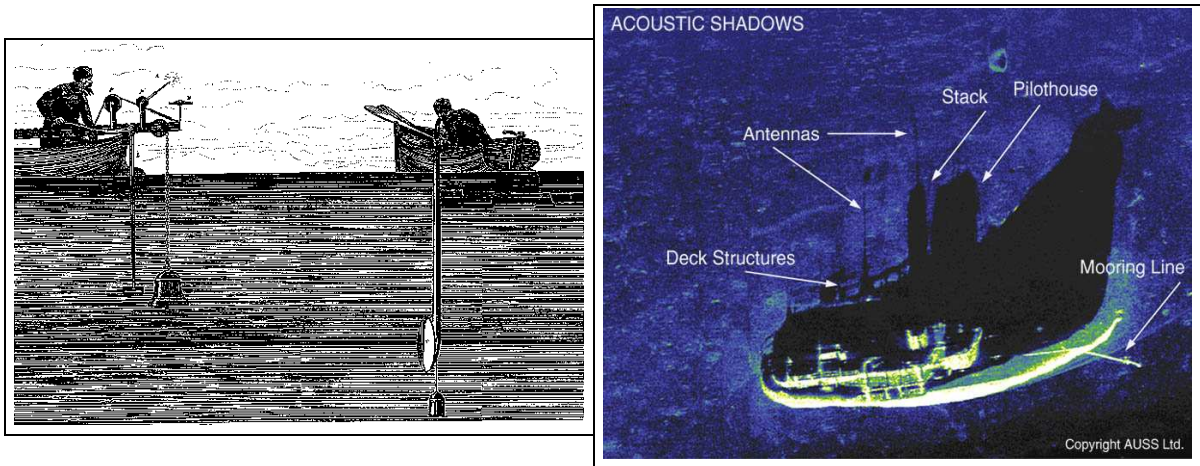


Figure 1.7. (a) Schéma de la première expérience de génération et de détection d'ondes acoustiques dans l'eau (dans le lac Léman). (b) Image sonar d'un sous-marin.

1.5.2 Echographie médicale

Le corps humain ressemble beaucoup à l'eau du point de vue de ses propriétés acoustiques. Les ondes ultrasonores (ultrasonore = de fréquence plus élevée que les fréquences audibles par l'oreille humaine) sont utilisées pour faire des images de l'intérieur du corps ou des organes.

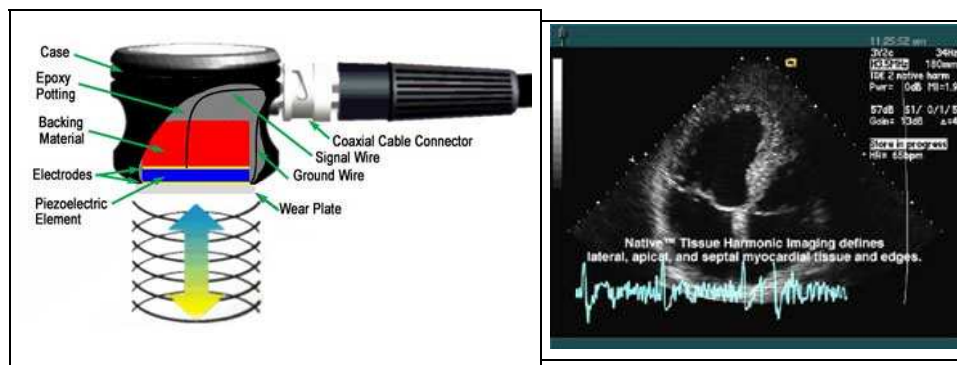


Figure 1.8. (a) Vue en coupe d'un transducteur ultrasonore monoélément. (b) Image échographique.

1.6 Applications des ondes dans les solides ?

1.6.1 Contrôle non destructif

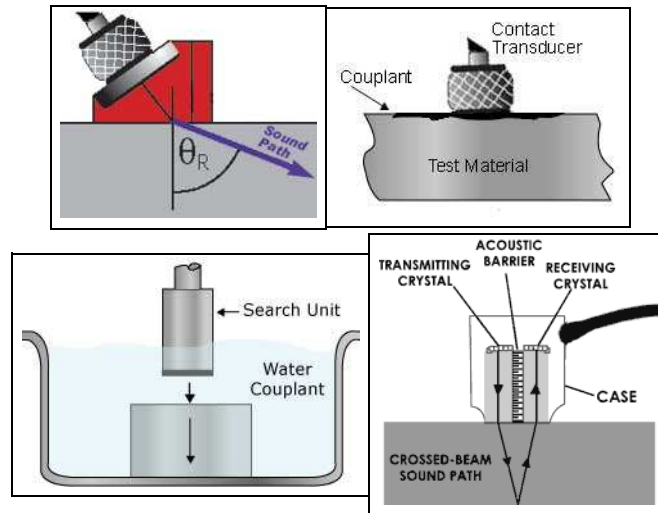


Figure 1.9. Quelques représentations schématiques de techniques ultrasonores employées en contrôle non destructif. (a) Couplage d'une onde au delà de l'angle limite de réfraction par l'usage d'un prisme. (b) Transduction directe dans un matériau par une substance couplante. (c) Transduction d'ondes ultrasonores par couplage dans l'eau. (d) Inspection de l'intérieur d'un matériau solide par la mesure de la réflexion des ondes ultrasonores aux interfaces.

1.6.2 Ondes élastiques de surface (*surface acoustic waves*)

Il y a actuellement des filtres à ondes de surface dans tous les téléphones portables (plusieurs dans le même téléphone) ! Ces filtres sont fabriqués sur des substrats piézoélectriques de quartz, tantalate de lithium ou autres.

Les ondes sont générées directement à la surface par des peignes interdigités métalliques, dont la périodicité est de l'ordre du micron. Les fréquences des filtres vont de 50 MHz (télévision) à 2.5 GHz (filtres UMTS).

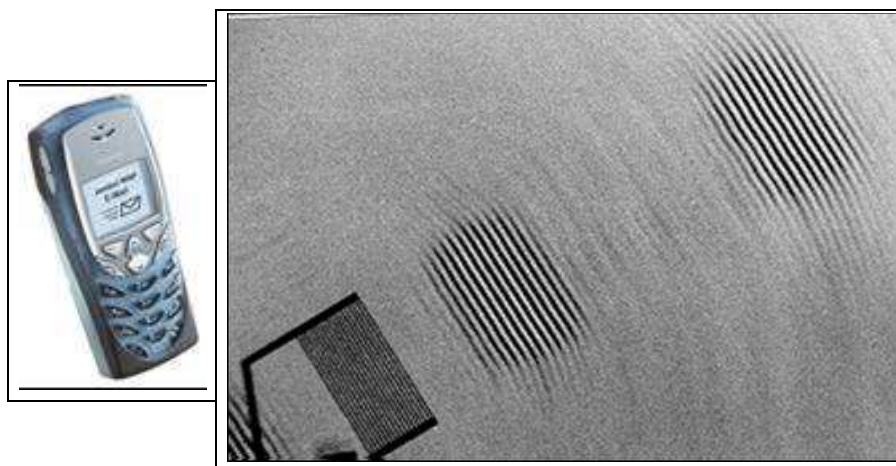


Figure 1.10. Tous les téléphones mobiles actuels embarquent un ou plusieurs filtres à ondes élastiques de surface. La figure de droite montre un instantané de la propagation d'une onde de surface sur un substrat piézoélectrique générée par un transducteur à peignes interdigités. L'observation est faite au microscope électronique à balayage par le biais des électrons secondaires (de faible énergie) diffusés par l'onde de potentiel électrique accompagnant l'onde élastique de surface.

1.6.3 Capteurs à ondes de surface

Les ondes de surface sont très sensibles à tout corps étranger venant perturber les conditions locales de propagation sur la surface. Elles sont également sensibles aux perturbations physiques : température, pression ou contraintes, etc. De ce fait, les dispositifs à ondes de surface permettent la réalisation de capteurs très sensibles, potentiellement interrogeables à distance. Ces propriétés s'étendent aux modes de plaques ou aux dispositifs à films minces.

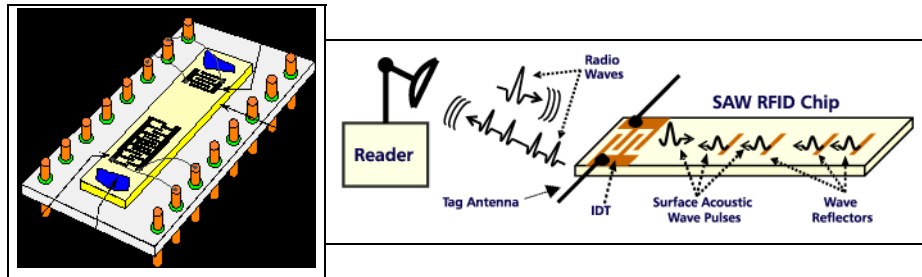


Figure 1.11. (a) Dispositif SAW de type ligne à retard. Une onde élastique de surface est émise par un transducteur à peignes interdigités et est détectée par un autre. Toute variation des conditions de propagation sur le trajet de l'onde se traduit par une variation de la fréquence de résonance. (b) Principe de l'interrogation à distance passive (c'est-à-dire sans source d'énergie embarquée) d'un SAW-tag, dispositif permettant de représenter un code numérique par un réseau de réflecteurs convenablement placés.

1.6.4 Résonateurs à ondes de volume

Il existe de nombreux types de résonateurs utilisant des ondes de volume, ou plus généralement des modes acoustiques, d'un mono-cristal. Entre tous les matériaux, les mono-cristaux présentent les atténuations les plus faibles. Il est ainsi possible d'emmagasiner de l'énergie élastique pendant un grand nombre d'oscillations de l'onde, ce qui permet de définir des fréquences très pures. Le comptage à une fréquence déterminée permet la réalisation d'une horloge, donc la mesure du temps. C'est le principe des quartz de l'horlogerie. Les fréquences utilisées vont de qq 10 kHz à qq 100 MHz.

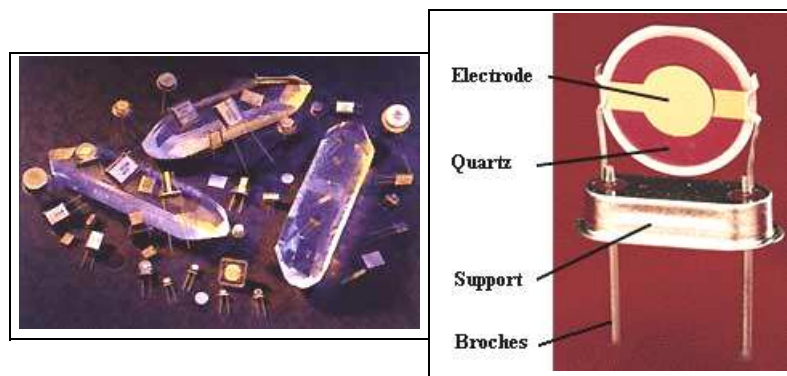


Figure 1.12. (a) Monocristaux de quartz et résonateurs à ondes de volume dans leurs boîtiers. (b) Vue de l'intérieur d'un boîtier de résonateur à quartz (couvercle ôté).

1.6.5 Résonateurs à films minces (FBAR)

Les FBAR (film bulk acoustic resonators) sont des résonateurs à ondes de volume utilisant des couches piézoélectriques dont l'épaisseur est de l'ordre du micron. Ils présentent plus de pertes que les résonateurs mono-cristallins, mais les fréquences de fonctionnement sont bien plus élevées (1 à 5 GHz). Ils concurrencent les filtres à ondes de surface.

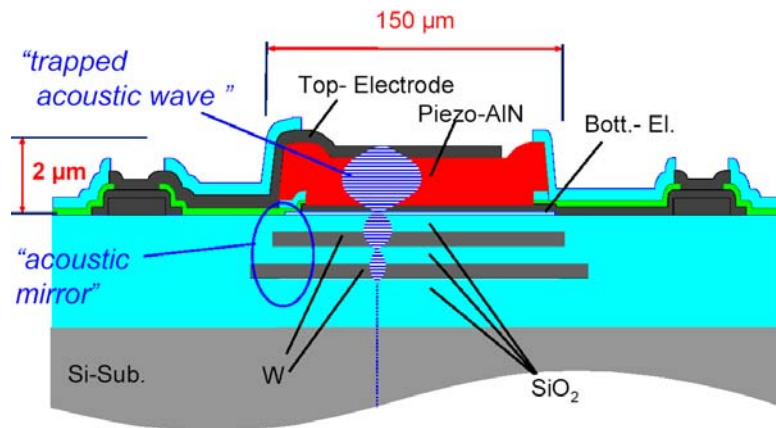


Figure 1.13. Schéma d'un résonateur à ondes de volume dans les films minces. Les ondes acoustiques sont générées dans la couche piézoélectrique (ici en nitrure d'aluminium, AlN) prise en sandwich entre deux électrodes planaires. Un miroir acoustique constitué en alternance de couches d'épaisseur quart d'onde de deux matériaux présentant un fort contraste de leurs impédances acoustiques assure le confinement des ondes.

1.6.6 Cristaux phononiques

Les cristaux phononiques sont des structures périodiques composites à 1D, 2D ou 3D, analogues aux cristaux photoniques de l'optique et de l'électromagnétisme. Un grand contraste d'indice permet d'obtenir des bandes interdites totales, c'est-à-dire la possibilité de réfléchir dans une certaine gamme de fréquence toute onde quelle que soit sa polarisation ou son incidence.

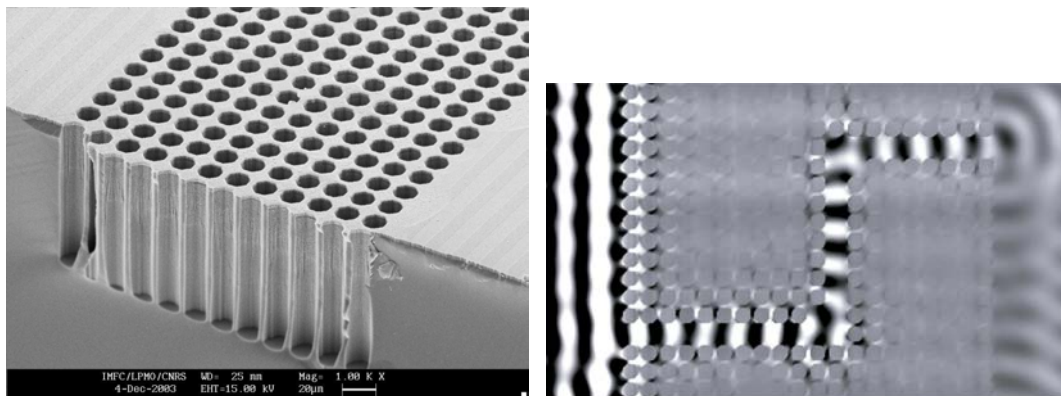


Figure 1.14. (a) Exemple de réalisation d'un cristal phononique par gravure profonde du silicium. Les trous de section octogonale sont larges de 10 µm et profonds de 100 µm environ. Un tel cristal phononique présente une bande interdite pour les ondes élastiques de surface pour des fréquences autour de 100 MHz. (b) Simulation numérique de la propagation d'une onde acoustique dans un guide d'onde ménagé en insérant une ligne coudée de défauts dans un cristal phononique autrement parfait.

Chapitre 2

Modèle scalaire des ondes - le cas des fluides

2.1 Modèle unidimensionnel (1D)

2.1.1 Equation d'onde

Une onde est de façon générale une perturbation de l'équilibre d'un milieu qui se propage dans l'espace au cours du temps.

Soit donc une fonction $u(t, x)$, une équation d'onde est du type :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

c est homogène à une vitesse (la *célérité*), en m/s.

- Pour les ondes mécaniques (donc acoustiques et élastiques), l'équilibre est donné par le principe de Hamilton : les variations du Lagrangien sont nulles ($\mathcal{L} = E_c - E_p$; $\delta\mathcal{L} = 0$).
- Pour les ondes optiques, l'équation des ondes est issue des équations de Maxwell.

2.1.2 Solution générale ?

Il est aisé de vérifier que la solution générale est :

$$u(t, x) = F(t - x/c) + G(t + x/c) \quad (2.2)$$

où F et G sont des fonctions quelconques (2 fois dérivables) qui représentent une onde se propageant vers la droite et une onde se propageant vers la gauche, *indépendamment*.

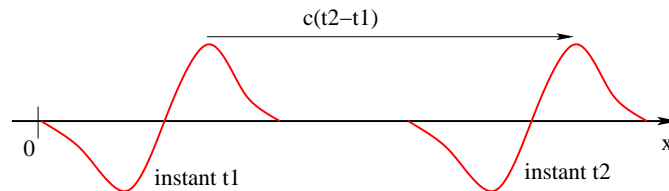


Figure 2.1. Représentation d'une solution générale de l'équation d'onde 1D du type (2.2).

Exemple : la vibration $F(t) = \cos(\omega t)$ donne $u(t, x) = \cos(\omega t - kx)$
 $\omega = 2\pi f$ est la pulsation, ou fréquence angulaire ; f est la fréquence (en Hz)
 $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde ; λ est la longueur d'onde

2.1.3 Spectre d'ondes planes

Toute fonction (suffisamment régulière) admet une transformée de Fourier et réciproquement :

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega ; \tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.3)$$

d'où le *spectre d'ondes planes* d'une solution de l'équation d'onde :

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(i(\omega t - kx)) d\omega \text{ avec } k(\omega) = \omega/c \quad (2.4)$$

(et un terme similaire avec $\tilde{G}(\omega)$ et $k(\omega) = -\omega/c$).

$k^2(\omega) = (\omega/c)^2$ est une *relation de dispersion*.

Exercice : prendre la transformée de Fourier en temps et espace de l'équation d'onde (1) et montrer que la solution générale est donnée par (2.4)

2.1.4 Dispersion et vitesse de groupe

Si la vitesse des ondes est dispersive (elle dépend de la fréquence), $c(\omega)$, alors la relation de dispersion $k(\omega) = \pm \omega/c(\omega)$ ne définit plus des droites.

- Pour un *paquet d'ondes* : $u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega)x)) d\omega$
- La vitesse de phase est $v(\omega) = \omega/k(\omega)$. La lenteur est $s(\omega) = 1/v(\omega)$.
- La vitesse de groupe est par définition $v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right)^{-1}$.

Exercice : montrer que la vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie spectrale de l'onde, c'est-à-dire la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} t |u(t, x)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{v_g(\omega)} |\tilde{F}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.5)$$

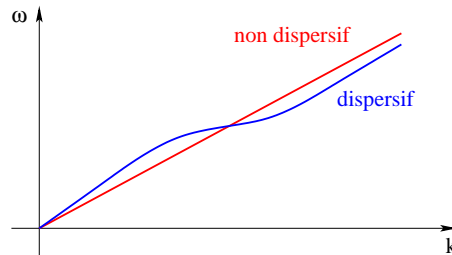


Figure 2.2. Représentation de la notion de dispersion : une onde est dispersive si la relation entre fréquence angulaire et vecteur d'onde n'est pas linéaire.

2.1.5 Exemples de dispersions et leur influence

- La *phase de propagation* au point $x = L$ est $\varphi(\omega) = k(\omega)L$.
- $t_g(\omega) = d\varphi(\omega)/d\omega = L/v_g(\omega)$ est le *temps de groupe* (temps pour parcourir L).
- On considère souvent un modèle de phase spectrale polynômiale :

$$\varphi(\omega) = \varphi_0 + \varphi_0'(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2!}\varphi_0''(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{3!}\varphi_0'''(\omega - \omega_0)^3 + \dots$$

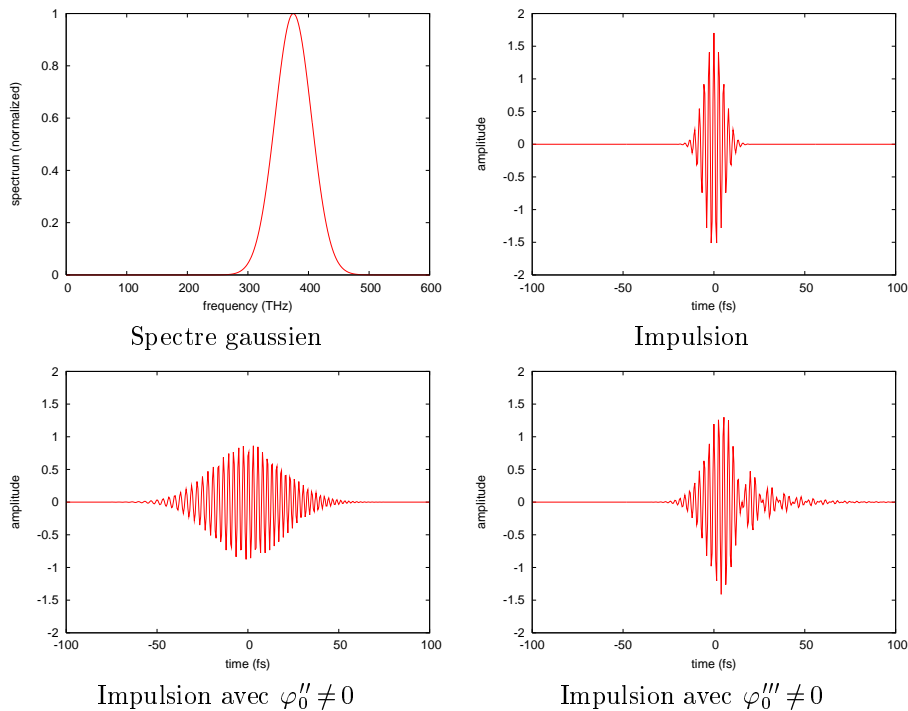


Figure 2.3. Exemple d'influence de la dispersion sur l'allure temporelle d'une impulsion.

2.1.6 Fonction de Green 1D

En régime forcé, l'équation d'onde acquiert un second membre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(t, x) \tag{2.6}$$

$g(t, x)$, *fonction de Green*, est une solution particulière pour $h(t, x) = \delta(t) \delta(x)$. Alors la solution de (2.6) est $u(t, x) = [h * g](t, x)$ (convolution).

Récréation - montrer que :

$$\tilde{g}(\omega, k) = \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2}; \hat{g}(\omega, x) = -\frac{i}{2c\omega} \exp\left(-i\frac{\omega}{c}|x|\right); g(t, x) = \frac{1}{2c} \text{H}\left(t - \frac{|x|}{c}\right) \tag{2.7}$$

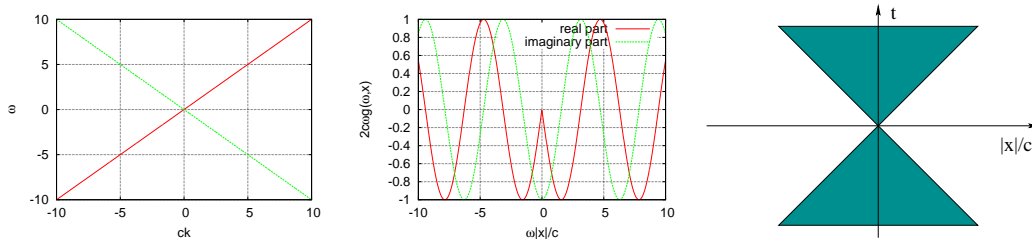


Figure 2.4. Représentation graphique des trois représentations de la fonction de Green de l'équation (2.7).

2.2 Ondes acoustiques 1D

2.2.1 Descriptions lagrangienne et eulérienne

Soit un fluide *continu, isotrope, homogène* et parfaitement *compressible*.

- Variables de Lagrange attachées au point matériel : *position d'équilibre* a et temps t .
Grandeur physique : $G(a, t)$.
- Variables d'Euler attachées au point géométrique du référentiel : *coordonnée* x et temps t .
La *même* grandeur physique : $g(x, t)$.
- Position du point matériel : $x = X(a, t)$, donc $G(a, t) = g(X(a, t), t)$
- Déplacement : $U(a, t) = X(a, t) - a = u(X(a, t), t)$
- *Vitesse particulière* $V_p = \partial U / \partial t = \partial X / \partial t$ et *vitesse locale* $v = \partial u / \partial t$

$$V_p = v + V_p \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.8}$$

Approximation de l'acoustique linéaire : $\partial u / \partial x \ll 1$ et donc $V_p \simeq v$.

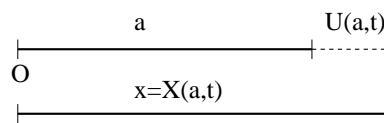


Figure 2.5. Relation entre coordonnées lagrangiennes et eulériennes.

2.2.2 Relation entre pression et déplacement

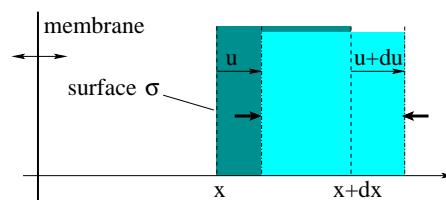


Figure 2.6. Déformation d'une tranche de fluide.

$$du = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} dx \ll dx$$

Résultante des forces de pression sur une tranche de largeur dx et section σ :

$$dF = \sigma p(t, x + u) - \sigma p(t, x + u + dx) \simeq -\sigma \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Par application de la relation fondamentale de la dynamique :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

où ρ_0 est la densité (statique) du fluide.

La pression est la somme de la pression au repos et de l'écart de pression δp :

$$p(t, x) = p_0 + \delta p(t, x) \quad (2.10)$$

Pour un fluide compressible, on a la relation (avec $dV = \sigma dx$) :

$$\delta p = -\frac{1}{\chi} \frac{\delta(dV)}{dV} = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.11)$$

où χ est le *coefficient de compressibilité*. Par définition, $S(t, x) = \partial u / \partial x$ est la *dilatation locale* (*strain* en anglais).

En associant (2.9) et (2.11), on obtient l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ ou } \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} = 0 \text{ avec } c = (\rho_0 \chi)^{-1/2} \quad (2.12)$$

La vitesse v et la dilatation locale S satisfont la même équation d'onde.

2.2.3 Vitesse du son

Comment prévoir la vitesse c du son dans un gaz supposé parfait ?

- L'équation d'état du gaz parfait, de masse molaire M , pour n moles est $pV = nRT$ ou $p = \rho RT / M$, (T température, $R = 8.314$ J/mole.K)
- Les compressions et dilatations provoquées par l'onde acoustique sont adiabatiques (et non isothermes) et suivent la loi $pV^\gamma = \text{Cste}$. D'où la relation $\chi = (\gamma p_0)^{-1}$. $\gamma = 1.67$ pour un gaz monoatomique et 1.4 pour un gaz diatomique (à peu près le cas de l'air).

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} \text{ donc } \chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\gamma p_0}$$

$$\text{et donc } c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

mais mieux vaut se fier aux résultats expérimentaux !

$c \simeq 343$ m/s pour l'air à $T = 293$ K.

Et dans l'eau ?

$c \simeq 1480$ m/s pour l'eau à $T = 293$ K.

Air	Eau
343 m/s	1480 m/s

Tableau 2.1. Vitesse du son à température ambiante ($T=293$ K).

2.2.4 Impédance acoustique

Le déplacement u est solution de l'équation d'onde (12), donc

$$u(t, x) = F(t - x/c) + G(t + x/c)$$

avec F et G deux fonctions arbitraires. Donc

$$v(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t} = F'(t - x/c) + G'(t + x/c)$$

$$\delta p(t, x) = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial u}{\partial x} = Z (F'(t - x/c) - G'(t + x/c))$$

avec l'impédance acoustique $Z = \rho_0 c = \frac{1}{c\chi} = \sqrt{\rho_0 / \chi}$.

Ecart de pression et vitesse sont proportionnels pour les ondes se propageant vers la droite, $\delta p_+ = Zv_+$, et vers la gauche, $\delta p_- = -Zv_-$.

Cette relation est analogue à celle de l'impédance électrique : $U = ZI$.

2.2.5 Représentation des pertes de propagation ?

Un fluide ne peut en pratique réagir instantanément à une sollicitation. Phénoménologiquement, on modifie (11) en :

$$\delta p = -\frac{1}{\chi} \left(S + \tau \frac{\partial S}{\partial t} \right) \quad (2.13)$$

où τ est une constante de temps.

Illustration - Pour $\delta p = H(t)$, montrer que $S = -\chi(1 - \exp(-t/\tau))$.

L'équation de propagation devient $\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \partial^2 / \partial x^2 (u + \tau \partial u / \partial t) = 0$ (ce n'est plus une équation d'onde !). Pour une onde plane monochromatique, $F(\omega t - kx)$, on obtient la relation de dispersion complexe $\omega^2 = c^2 (1 + i\omega\tau) k^2$.

Exercice - Poser $k = \beta - i\alpha$ de sorte que l'onde plane harmonique

$$u(t, x) = \exp(i(\omega t - kx)) = \exp(-\alpha x) \exp(i(\omega t - \beta x)) \quad (2.14)$$

Montrer que $\alpha \simeq \frac{\omega^2 \tau}{2c}$ et $\beta \simeq \frac{\omega}{c} (1 - \frac{3}{8} \omega^2 \tau^2)$ pour $\omega\tau \ll 1$. α s'exprime en dB/m.

Propriété - En pratique, on peut complexifier le coefficient de compressibilité $\chi \rightarrow \chi / (1 + i\omega\tau)$ et former le spectre d'ondes planes (2.4) avec les ondes planes harmoniques atténuées (2.14).

2.3 Modèle tridimensionnel des ondes (3D)

2.3.1 Equation d'onde 3D

Soit une fonction $u(t, \mathbf{r})$, une équation d'onde *isotrope* est du type :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \quad (2.15)$$

avec le laplacien $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Isotropie : les propriétés du milieu sont invariantes par rotation dans l'espace. Donc la propagation est la même dans toutes les directions.

Une équation d'onde *anisotrope* est du type :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^3 c_{ij}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad (2.16)$$

La propagation des ondes dans un milieu anisotrope dépend de la direction.

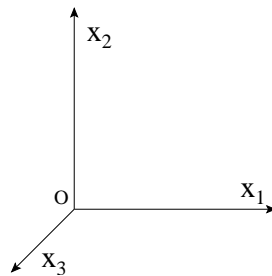


Figure 2.7. Définition d'un repère de l'espace tridimensionnel.

2.3.2 Onde plane et onde plane harmonique

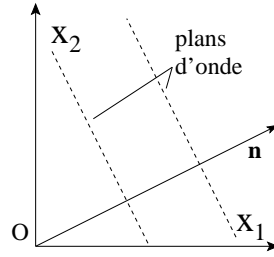


Figure 2.8. Définition d'une onde plane.

Une onde plane 3D est de la forme

$$u(t, \mathbf{r}) = F(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} / c) = F\left(t - \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{c}\right) \quad (2.17)$$

avec \mathbf{n} un vecteur unitaire représentant la direction de propagation. La décomposition (2.2) n'est plus la solution générale de l'équation d'onde comme à une seule dimension.

Une onde plane harmonique est de la forme

$$u(t, \mathbf{r}) = \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \quad (2.18)$$

Pour l'équation d'onde isotrope (2.15), on a la relation de dispersion $\omega^2 = c^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = c^2 k^2$, avec $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$. Pour l'équation d'onde anisotrope (2.16), on a $\omega^2 = \sum_{i,j=1}^3 c_{ij}^2 k_i k_j$.

2.3.3 Spectre d'ondes planes

Est-il possible de généraliser en 3D le spectre d'onde plane 1D (2.4) ? Prenons la transformée de Fourier en temps et en espace, valable pour toute fonction u :

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \tilde{u}(\omega, \mathbf{k}) \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \quad (2.19)$$

Si u est une solution de l'équation d'onde, ω et \mathbf{k} sont liés par une relation de dispersion. Donc k_3 , par exemple, est fonction de ω , k_1 et k_2 :

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\omega dk_1 dk_2 \tilde{u}(\omega, \mathbf{k}) \exp(i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3(\omega, k_1, k_2) x_3)) \quad (2.20)$$

Exemple - si $k^2 = \omega^2/c^2$ (donc en l'absence de dispersion), alors

$$k_3 = \pm \sqrt{\omega^2/c^2 - k_1^2 - k_2^2} \text{ si } \omega^2/c^2 - k_1^2 - k_2^2 \geq 0 \text{ ou } k_3 = \pm i\sqrt{|\omega^2/c^2 - k_1^2 - k_2^2|} \text{ sinon} \quad (2.21)$$

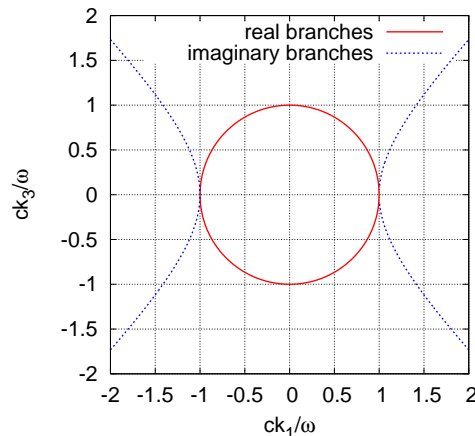


Figure 2.9. Représentation des branches réelles et imaginaires, données par l'équation (2.21), dans le cas où $k_2 = 0$.

2.3.4 Dispersion temporelle et spatiale

Supposons connaître la relation de dispersion sous la forme $k(\omega, \mathbf{n})$. Alors :

- $v(\omega, \mathbf{n}) = \omega/k(\omega, \mathbf{n})$ est la *vitesse de phase* ; $s(\omega, \mathbf{n}) = k(\omega, \mathbf{n})/\omega$ est la *lenteur*
- $v_g(\omega, \mathbf{n}) = (\partial k/\partial \omega)^{-1}$ est la *vitesse de groupe (temporelle)* qui donne la vitesse de la propagation d'un signal.
- $\mathbf{v}_g(\omega, \mathbf{n}) = \omega(\nabla_{\mathbf{n}} k^{-1}) = (\nabla_{\mathbf{n}} v)$ est la *vitesse de groupe (spatiale)* qui donne la vitesse et la direction de propagation du front d'onde.

Principe de la phase stationnaire - Si on peut utiliser la représentation (typique du champ lointain) :

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \int d\mathbf{n} \tilde{u}(\omega, \mathbf{n}) \exp(i(\omega t - k(\omega, \mathbf{n})\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})) \quad (2.22)$$

l'énergie se concentre suivant les trajectoires telles que la phase dans l'exponentielle est stationnaire en temps et espace, soit

$$t = v_g^{-1}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \text{ et } v\mathbf{r} = v_g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.23)$$

2.3.5 Réflexion totale d'une onde plane - incidence normale

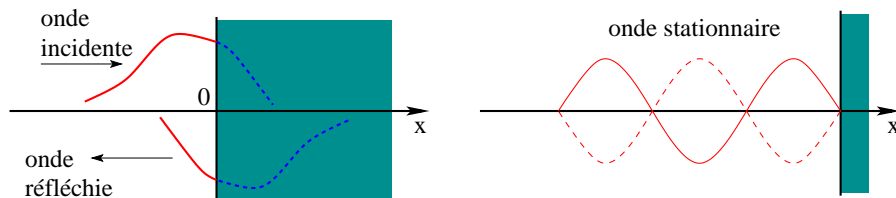


Figure 2.10. (a) Figuration de la réflexion totale d'une onde dans le cas où l'amplitude s'annule sur la surface du miroir (condition de blocage). (b) Notion d'onde stationnaire.

Soit l'onde plane incidente $F_i(t - x/c)$, l'onde réfléchie $G_r(t + x/c)$ est aussi plane. L'onde totale est $u(t, \mathbf{r}) = F_i(t - x/c) + G_r(t + x/c)$.

On suppose que l'amplitude des ondes s'annule sur le miroir (*condition de blocage*), alors $G_r(t) = -F_i(t)$ et $u(t, \mathbf{r}) = F_i(t - x/c) - F_i(t + x/c)$.

Si $F_i(t) = \exp(i\omega t)$, alors $u(t, \mathbf{r}) = -2i \exp(i\omega t) \sin(\omega x/c)$ est une *onde stationnaire*.

Dans un résonateur, les modes sont discrets : $\omega L/c = n\pi$ avec $n \geq 1$ entier.

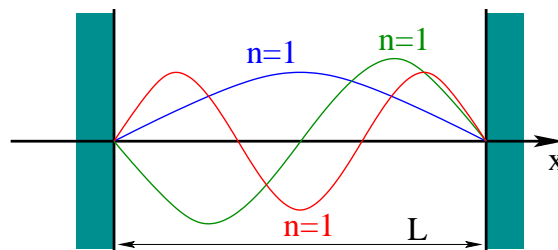


Figure 2.11. Notion de résonateur.

2.3.6 Guidage des ondes entre deux miroirs plans

Pour que la superposition de deux ondes planes harmoniques respecte les conditions aux limites sur les miroirs il faut respecter *l'accord de phase* :

- la *fréquence se conserve* ;
- le *vecteur d'onde le long des miroirs se conserve*.

D'où la décomposition :

$$u(t, \mathbf{r}) = \exp(i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)) - \exp(i(\omega t + k_1 x_1 - k_2 x_2)) = -2i \exp(i(\omega t - k_2 x_2)) \sin(k_1 x_1)$$

qui est une onde propagative suivant x_2 mais stationnaire suivant x_1 .

- Relation de dispersion : $k_1 L = n\pi$ et $k_2^2 = \beta^2 = \omega^2/c^2 - (n\pi/L)^2$, pour $n \geq 1$.
- Il existe une fréquence de coupure $\omega_c = \pi c/L$ (ou $f_c = c/(2L)$).

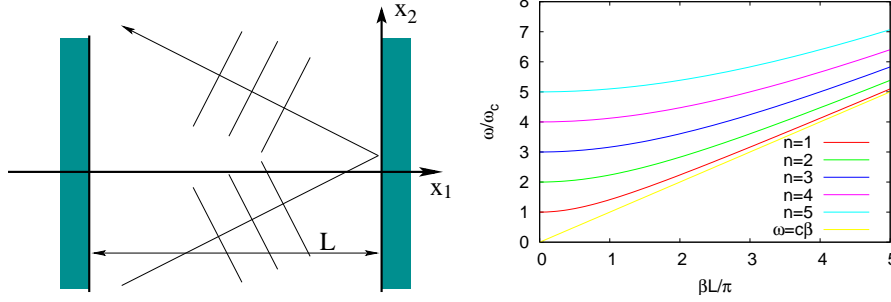


Figure 2.12. (a) Guidage entre deux miroirs plans. (b) Dispersion des premiers modes guidés.

2.4 Ondes acoustiques 3D

2.4.1 Relations entre pression et déplacements

On généralise la relation (2.10) en

$$p(t, \mathbf{r}) = p_0 + \delta p(t, \mathbf{r}) \text{ avec le vecteur position } \mathbf{r} = (x, y, z)^T \quad (2.24)$$

La dilaton locale devient

$$S(t, \mathbf{r}) = \frac{\delta(dV)}{dV} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.25)$$

Relation fondamentale de la dynamique :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = - \left(\frac{\partial(\delta p)}{\partial x}, \frac{\partial(\delta p)}{\partial y}, \frac{\partial(\delta p)}{\partial z} \right)^T = - \nabla(\delta p) \quad (2.26)$$

L'équation (25) montre que la polarisation d'une onde plane est longitudinale : les déplacements ont lieu uniquement dans le sens de propagation.

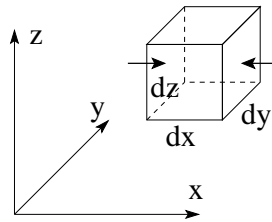


Figure 2.13. Représentation d'un volume élémentaire cubique de fluide.

2.4.2 Equation d'onde acoustique 3D

Pour un fluide compressible à comportement linéaire, on a toujours $S = -\chi \delta p$. D'où l'équation d'onde 3D scalaire (pour δp ou S) ou vectorielle (pour \mathbf{u} ou \mathbf{v}) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{u} = 0 \text{ ou } \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial t^2} - c^2 \Delta(\delta p) = 0 \text{ avec } c = (\rho_0 \chi)^{-1/2} \quad (2.27)$$

Exercice - Montrer (2.27) !

Généralisation - Supposons qu'il existe une densité de force par unité de volume, \mathbf{f} , due à la pesanteur ($\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$) ou à des sources extérieures, alors (2.26) et (2.27) deviennent

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \nabla(\delta p) = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} / \rho_0 ; \quad \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial t^2} - c^2 \Delta(\delta p) = -c^2 \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (2.29)$$

2.4.3 Flux de puissance et vecteur de Poynting

On définit les grandeurs énergétiques :

- l'énergie cinétique $E_c = \int_V e_c dV$ avec $e_c = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$
- l'énergie potentielle $E_p = \int_V e_p dV$ avec $e_p = \frac{1}{2} \frac{S^2}{\chi} = \frac{1}{2} \chi (\delta p)^2$
- le vecteur de Poynting $\mathbf{P} = \delta p \mathbf{v}$
- le travail des forces internes $W = \int_V w dV$ avec $\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$

A partir de (2.28) : (avec $\nabla(\delta p \mathbf{v}) = \nabla(\delta p) \cdot \mathbf{v} + \delta p \nabla \mathbf{v}$ et $\nabla \mathbf{v} = \partial S / \partial t$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \rho_0 \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla(\delta p) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial e_c}{\partial t} + \frac{\partial e_p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{P} \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (E_c + E_p) + \int_{\sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{l} d\sigma \end{aligned} \quad (2.30)$$

Le flux du vecteur de Poynting représente la puissance transportée par l'onde.

2.4.4 Relations énergétiques pour les ondes planes

Le vecteur de Poynting représente la densité de puissance instantanée par unité de surface transportée par l'onde. L'intensité acoustique est par définition

$$I = \langle \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{l} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \delta p \mathbf{v} \cdot \mathbf{l} \quad (2.31)$$

Pour une onde plane dans la direction \mathbf{l} , $u = F(t - x/c)$, $v = F'(t - x/c)$ et $\delta p = ZF'(t - x/c)$, avec x suivant l'axe \mathbf{l} .

Alors $e_c = e_p = \frac{1}{2} \rho_0 F'^2(t - x/c)$ et $\mathbf{P} \cdot \mathbf{l} = ZF'^2(t - x/c) = c(e_c + e_p)$.

Pour une onde plane harmonique dans la direction \mathbf{l} , $u = u_m \sin(\omega(t - x/c))$, donc $v = \omega u_m \cos(\omega(t - x/c)) = v_m \cos(\omega(t - x/c))$.

- $e_c = e_p = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 u_m^2 \cos^2(\omega(t - x/c))$ et $\langle e_c \rangle = \langle e_p \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 \omega^2 u_m^2 = \frac{1}{4} \rho_0 v_m^2$
- $\mathbf{P} \cdot \mathbf{l} = Z v_m^2 \cos^2(\omega(t - x/c))$
- $I = \frac{1}{2} Z v_m^2 = \frac{1}{2Z} (\delta p_m)^2$

Pour les ondes planes harmoniques complexes, il faut utiliser

$$e_c = \frac{1}{4} \rho_0 \operatorname{Re}(\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}) ; e_p = \frac{1}{4} \chi \operatorname{Re}(\delta p^* \delta p) ; \mathbf{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\delta p \mathbf{v}^*) \quad (2.32)$$

2.4.5 Réflexion et réfraction

2.4.5.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites à la frontière de deux fluides non visqueux (séparés par une paroi supposée infiniment mince) sont :

- la continuité des composantes des déplacements normales à l'interface ;

- la *continuité des surpressions acoustiques* δp à l'interface.

Si l'interface est définie par $x=0$, alors

$$u_{1x}(t, x=0, y, z) = u_{2x}(t, x=0, y, z) \quad (2.33)$$

et idem pour les composantes normales de la vitesse, et

$$\delta p_1(t, x=0, y, z) = \delta p_2(t, x=0, y, z) \quad (2.34)$$

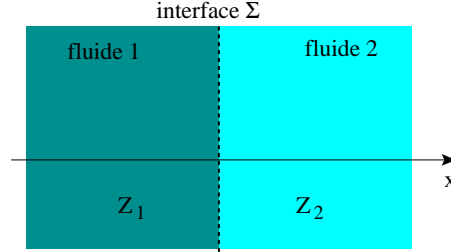


Figure 2.14. Interface entre deux fluides d'impédance acoustique différente.

2.4.5.2 Incidence normale pour une onde plane

Une onde plane incidente normalement donne naissance à des ondes planes réfléchie et transmise. Les déplacements normaux à l'interface sont $u_{1x}(t, \mathbf{r}) = F_i(t - x/c_1) + F_r(t + x/c_1)$ et $u_{2x}(t, \mathbf{r}) = F_t(t - x/c_2)$. A l'interface ($x=0$) :

$$F_i'(t) + F_r'(t) = F_t'(t) \text{ et } Z_1(F_i'(t) - F_r'(t)) = Z_2 F_t'(t)$$

De ces équations, on tire les *coefficients de réflexion et transmission de la vitesse*

$$r_v = \frac{F_r'(t)}{F_i'(t)} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ et } t_v = \frac{F_t'(t)}{F_i'(t)} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (2.35)$$

les *coefficients de réflexion et transmission de la surpression*

$$r_p = -\frac{F_r'(t)}{F_i'(t)} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \text{ et } t_p = \frac{Z_2 F_t'(t)}{Z_1 F_i'(t)} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (2.36)$$

les *facteurs de réflexion et transmission de la puissance acoustique*

$$R = \frac{|P_r|}{|P_i|} = -r_v r_p = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \text{ et } T = t_v t_p = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1 - R \quad (2.37)$$

2.4.5.3 Incidence oblique pour une onde plane harmonique

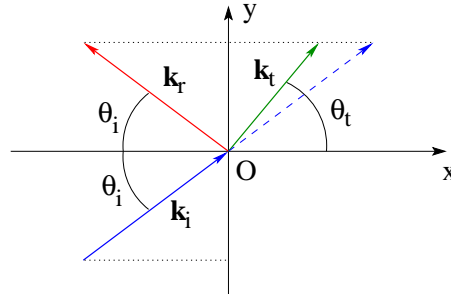


Figure 2.15. Loi de Snell-Descartes.

Pour une onde plane harmonique, l'égalité des composantes normales des déplacements donne en $\mathbf{r} = (0, y, z)^T$:

$$A_{ix} \exp(i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})) + A_{rx} \exp(i(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})) = A_{tx} \exp(i(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}))$$

Cette relation est vraie $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall \mathbf{r} \in \Sigma$, donc

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \text{ et } \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$$

Ce qui traduit les propriétés :

- La réflexion et la transmission sur une interface immobile se font sans changement de fréquence.
- La loi de Snell-Descartes : les composantes le long de l'interface du vecteur d'onde se conservent : $\theta_r = \theta_i$ et $\sin \theta_t / c_2 = \sin \theta_i / c_1$.

La surpression sur Σ est $\delta p(t, \mathbf{r}) = (A_i + A_r) \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) = A_t \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))$, avec la continuité de la composante normale de la vitesse on a

$$A_i + A_r = A_t \text{ et } \frac{A_i}{Z_1} \cos \theta_i - \frac{A_r}{Z_1} \cos \theta_i = \frac{A_t}{Z_2} \cos \theta_t$$

D'où les coefficients de réflexion et transmission de la surpression

$$r_p = \frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} \text{ et } t_p = \frac{A_t}{A_i} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} \quad (2.38)$$

et les facteurs de réflexion et transmission de la puissance acoustique

$$R = \frac{|P_r|}{|P_i|} = |r_p|^2 \text{ et } T = 1 - R \quad (2.39)$$

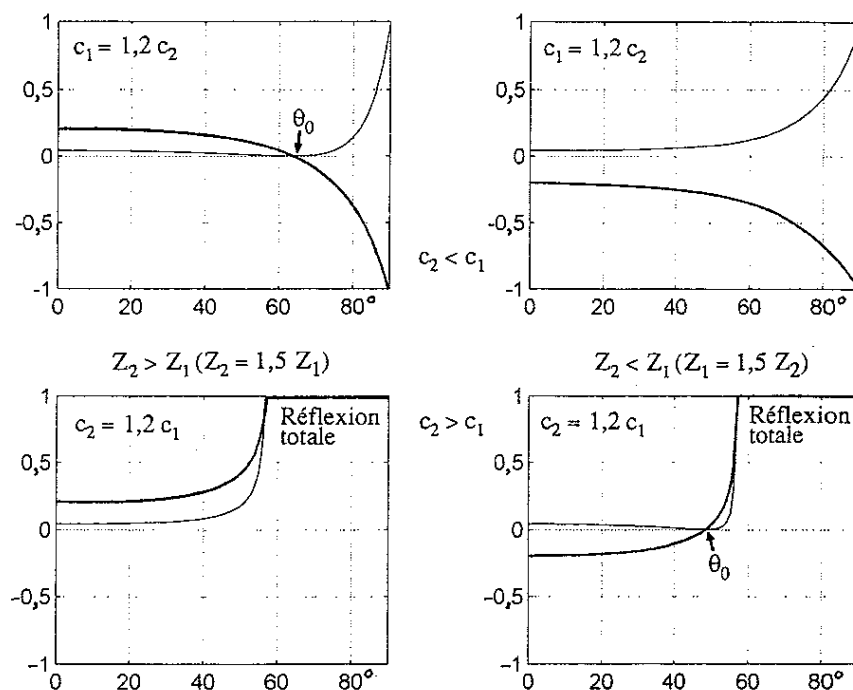


Figure 2.16. Coefficients de réflexion dans 4 cas.

2.5 Rayonnement acoustique 3D

2.5.1 Notion de fonction de Green isotrope 3D

On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ) , auquel cas le Laplacien devient

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) \quad (2.40)$$

Pour une excitation élémentaire ponctuelle la solution de l'équation d'onde, fonction de Green, est indépendante de θ et φ , donc

$$\frac{\partial^2 g(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} - c^2 \Delta g(t, \mathbf{r}) = \delta(t) \delta(\mathbf{r}) = \delta(t) \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \quad (2.41)$$

avec $r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On peut montrer que :

$$\tilde{g}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{c^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \omega^2}; \hat{g}(\omega, r) = \frac{1}{4\pi r} \exp\left(-i\frac{\omega}{c}r\right); g(t, r) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (2.42)$$

Cette solution représente une onde sphérique émanant de l'origine.

2.5.2 Rayonnement monochromatique d'une sphère

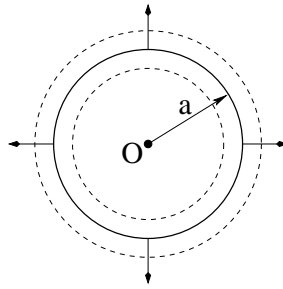


Figure 2.17. Rayonnement d'une sphère vibrant radialement.

Le champ de pression rayonné par une sphère de rayon a vibrant à la fréquence ω est donné par (2.42) :

$$\delta p(t, r) = \frac{A}{4\pi r} \exp(i\omega(t - r/c)) \quad (2.43)$$

(2.26), $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla(\delta p)$, montre que la vitesse est purement radiale, soit

$$v_r(t, r) = -\frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial(\delta p)}{\partial r} = \frac{A}{4i\pi\omega\rho_0 r^2} (1 + i\omega r/c) \exp(i\omega(t - r/c)) \quad (2.44)$$

Si la sphère est petite devant la longueur d'onde ($\omega a/c \ll 1$) alors avec la vitesse normale à la sphère, $V_n = v_r(0, a)$, $A \simeq 4i\pi\omega\rho_0 a^2 V_n$, d'où

$$\delta p = i\rho_0 \omega \frac{a^2}{r} V_n \exp(i\omega(t - r/c)); v_r = \frac{a^2}{r^2} V_n (1 + i\omega r/c) \exp(i\omega(t - r/c)) \quad (2.45)$$

2.5.3 Rayonnement d'une surface - intégrale de Rayleigh

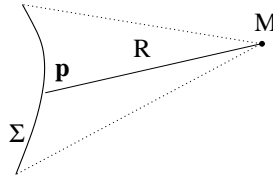


Figure 2.18. Rayonnement d'une surface.

Soit une surface Σ vibrant à la fréquence ω avec une vitesse normale $V_n(\mathbf{p})$, avec \mathbf{p} un point de la surface. Le champ de surpression rayonné au point \mathbf{r} s'obtient par l'intégrale de Rayleigh

$$\delta p(t, \mathbf{r}) = i\rho_0 \omega \exp(i\omega t) \int_{\Sigma} d\mathbf{p} V_n(\mathbf{p}) \frac{\exp(-i\omega R/c)}{2\pi R} \quad (2.46)$$

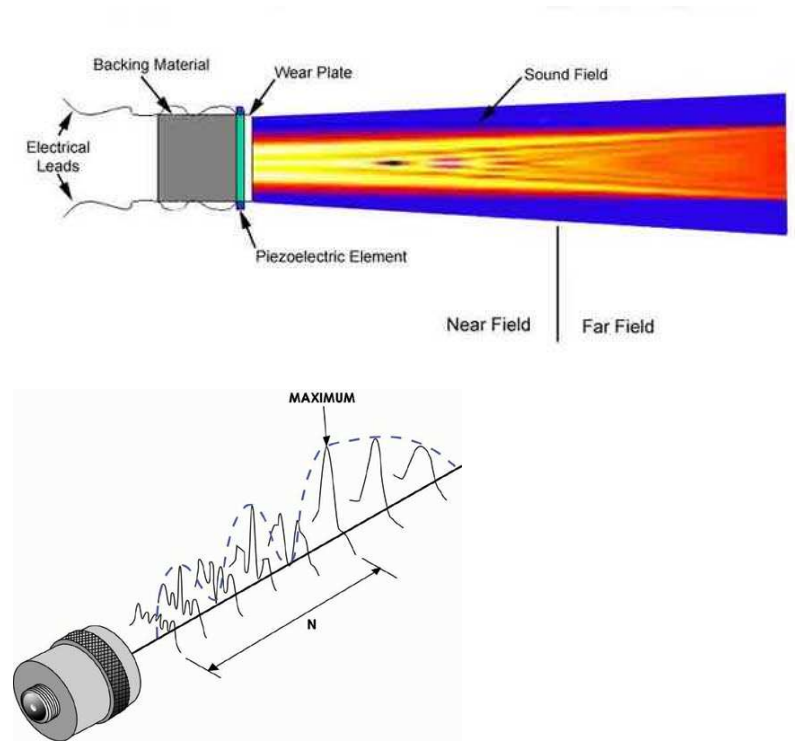


Figure 2.19. Champ de surpression rayonné par un transducteur plan.

2.5.4 Cas du disque plan - sur l'axe

Dans le cas du disque plan dont tous les points vibrent en phase

$$\delta p(t, r) = i \rho_0 \omega V_N \exp(i\omega t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\sigma \frac{\exp(-i\omega R/c)}{2\pi R} \quad (2.47)$$

avec $R^2 = r^2 + \sigma^2 - 2r\sigma \sin\theta \cos\varphi$. Pour l'axe du disque ($\theta = 0$) :

$$\delta p(t, r) = ZV_N \exp(i\omega(t - z/c)) (1 - \exp(-i\omega\beta/c)) \text{ avec } \beta = \sqrt{z^2 + a^2} - z \quad (2.48)$$

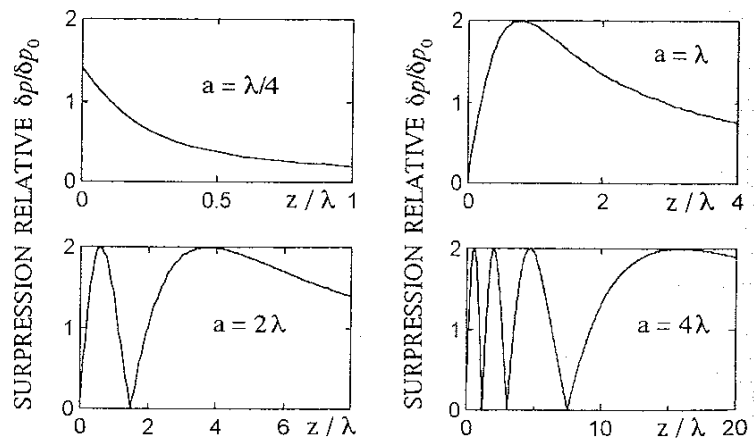


Figure 2.20. Champ de surpression rayonné sur l'axe par un transducteur plan.

2.5.5 Cas du disque plan - champ lointain

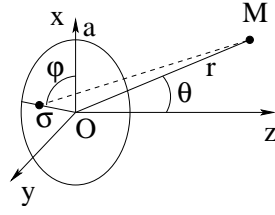


Figure 2.21. Géométrie du calcul du champ de surpression rayonné par un transducteur plan en champ lointain.

A grande distance du disque ($r \gg a$), $R \simeq r - \sigma \sin \theta \cos \phi$ et

$$\delta p(t, \mathbf{r}) = i \rho_0 \omega \frac{V_N}{r} \exp(i\omega(t - r/c)) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\sigma \exp(i\omega \sigma \sin \theta \cos \phi / c)$$

En utilisant des identités des fonctions de Bessel, on montre que

$$\delta p(t, \mathbf{r}) = i Z \frac{a}{r} V_N \frac{J_1(\omega a \sin \theta / c)}{\sin \theta} \exp(i\omega(t - r/c)) \quad (2.49)$$

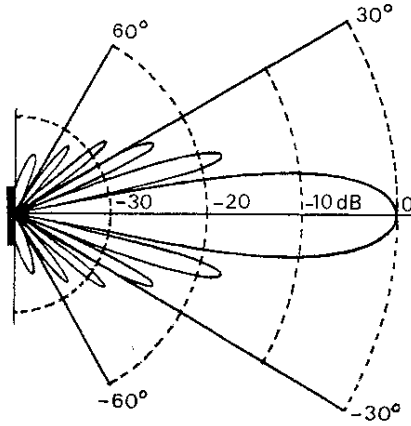


Figure 2.22. Cas d'un piston circulaire de diamètre $a = 3\lambda$.

2.5.6 Réponse impulsionnelle

A partir de l'intégrale de Rayleigh (2.46), le champ de surpression en temps et espace est donné par

$$\delta p(t, \mathbf{r}) = \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega i \omega \exp(i\omega t) \int_{\Sigma} d\mathbf{p} V_n(\omega, \mathbf{p}) \frac{\exp(-i\omega R/c)}{2\pi R}$$

En reconnaissant que l'intégrale spectrale donne la dérivée de la vitesse, soit l'accélération normale $a_n(t, \mathbf{p})$ de la surface d'émission,

$$\delta p(t, \mathbf{r}) = \rho_0 \int_{\Sigma} d\mathbf{p} \frac{a_n(t - R/c, \mathbf{p})}{2\pi R} \quad (2.50)$$

Cette surpression apparaît ainsi comme la convolution (dans le temps) de l'accélération de la surface d'émission par la fonction de Green 3D. En *mode piston*, tous les points ont la même accélération $a_n(t, \mathbf{p}) = A_n(\mathbf{p}) a(t)$, alors la réponse impulsionnelle de diffraction au point \mathbf{p} est

$$h(t, \mathbf{r}) = \int_{\Sigma} d\mathbf{p} A_n(\mathbf{p}) \frac{\delta(t - R/c)}{2\pi R} \quad (2.51)$$

et

$$\delta p(t, \mathbf{r}) = \rho_0 a(t) \star h(t, \mathbf{r}) \quad (2.52)$$

Chapitre 3

Cristaux, tenseurs, élasticité & piézoélectricité

3.1 Description des cristaux

3.1.1 Propriétés

L'atténuation des ondes élastiques est d'autant plus petite que le milieu de propagation est ordonné :

- Dans l'air (les gaz), on est limité en pratique à qq 100 kHz ;
- Dans l'eau (les liquides), on est limité à 50 MhZ environ ;
- *Dans les cristaux on peut travailler jusqu'à qq GHz, voire plus.* On utilise l'effet piézoélectrique pour générer les ondes élastiques à ces fréquences.

La structure des cristaux définit directement les propriétés d'anisotropie de propagation des ondes élastiques. On classe les cristaux suivant leur symétrie d'orientation. Cette symétrie microscopique se répercute sur les propriétés physiques macroscopiques.

Un cristal est homogène : le comportement d'échantillons de même orientation taillés dans un même cristal est identique.

La notion de tenseur est le langage mathématique privilégié pour décrire les propriétés physiques et leurs relations avec les symétries.

3.1.2 Réseau cristallin

Il existe une infinité de *noeuds*, points homologues dans une translation élémentaire : $\overline{OM} =$

$ma + nb + pc$ avec m, n, p entiers. Tous les noeuds ont le même environnement atomique.

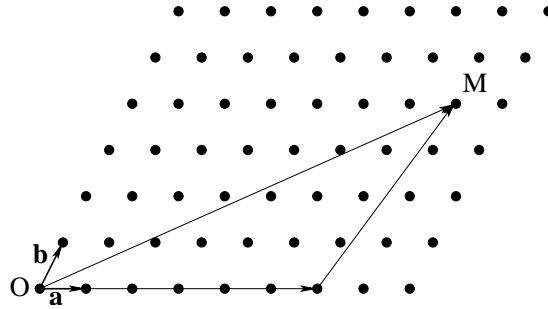


Figure 3.1. Définition des noeuds du réseau cristallin.

3.1.3 Rangées

Les noeuds sont disposés aux intersections de 3 familles de droites parallèles : les *rangées*. Trois entiers relatifs premiers entre eux définissent la rangée par $\mathbf{R}_{u,v,w} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$.

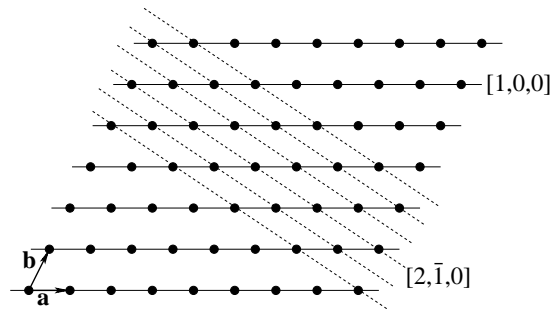


Figure 3.2. Rangées.

3.1.4 Plans réticulaires

On peut répartir tous les noeuds dans une famille de *plans réticulaires*, parallèles et équidistants. Les plans réticulaires sont désignés par les indices de Miller (h, k, l) . La distance entre plans réticulaires est $a/h, b/k, c/l$ suivant $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Les plans à petits indices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sont les plus écartés et portent la plus grande densité de noeuds par unité de surface.

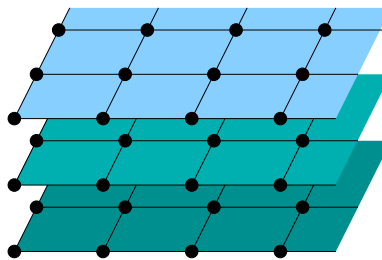


Figure 3.3. Plans réticulaires.

3.1.5 Mailles

Le réseau périodique peut être vu comme un empilement de *mailles*, des parallépipèdes dont les sommets sont des noeuds. Une maille bâtie avec 3 vecteurs de base est simple (contient un seul noeud).

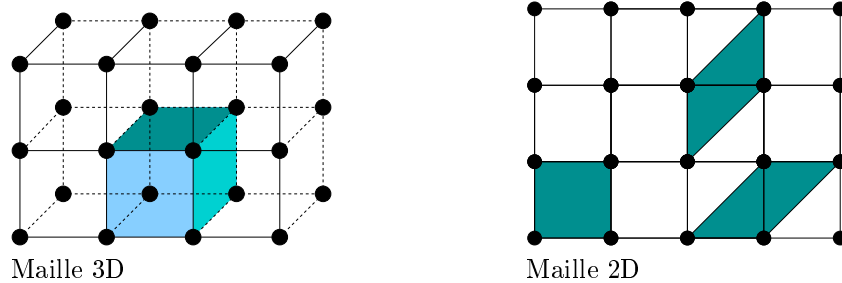


Figure 3.4. Exemples de mailles simples.

Exemple - Réseau cubique à faces centrées : un noeud additionnel au centre de chaque face du cube. La maille cubique est quadruple. La maille simple est un rhomboèdre.

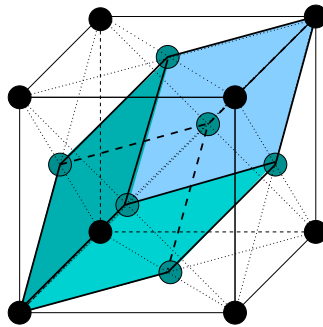


Figure 3.5. Maille simple du réseau cubique à faces centrées.

3.1.6 Motif

Un *motif* est une « grappe » d'atomes disposée aux noeuds du réseau périodique.

- Le motif peut être composé d'un seul atome
 - cubique à faces centrées : Cu, Ag, Al, Ni, Pt...
 - cubique centré : Li, Na, K, Cr...
- Le motif peut être composé d'atomes de même nature
 - structure diamant : réseau cfc + 1 atome en $1/4, 1/4, 1/4$ (Si, Ge...)
- Le motif peut être composé d'atomes différents (ZnS, AsGa)

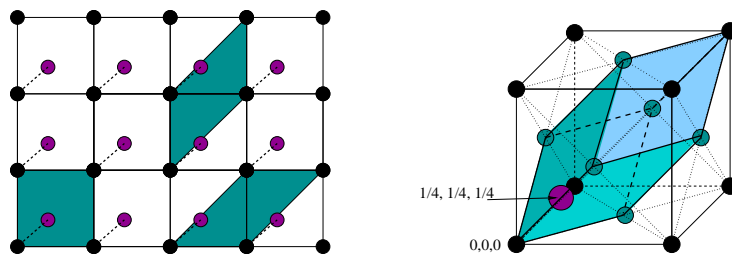


Figure 3.6. (a) Représentation d'un motif contenant deux atomes. (b) Représentation du motif diamant.

3.2 Symétrie d'orientation

3.2.1 Les 14 réseaux de Bravais

Les 14 *réseaux de Bravais* sont les différentes manières de distribuer dans l'espace une infinité de noeuds ayant le même environnement. Il n'existe que 7 mailles simples, définissant 7 réseaux primitifs. Il est possible suivant le cas de définir en plus un réseau

- centré (I)
- avec un noeud sur deux faces opposées (C)
- à faces centrées (F)

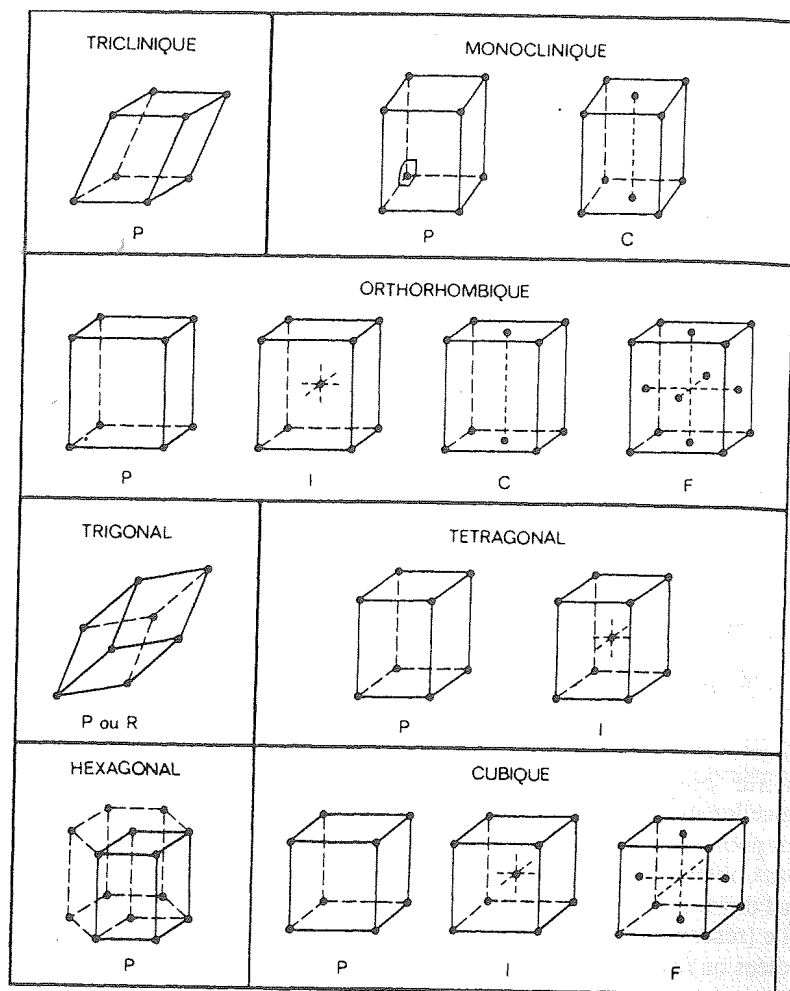


Figure 3.7. Les 14 réseaux de Bravais.

3.2.2 Les 32 classes de symétrie ponctuelle des cristaux

L'adjonction du motif à chaque noeud du réseau diminue la symétrie du cristal. Un cristal ne présente pas nécessairement de centre de symétrie (cristaux piézoélectriques par exemple). Les

32 classes de symétrie ponctuelle des cristaux conditionnent l'anisotropie des constantes des matériaux (et donc l'anisotropie de la vitesse de propagation des ondes élastiques).

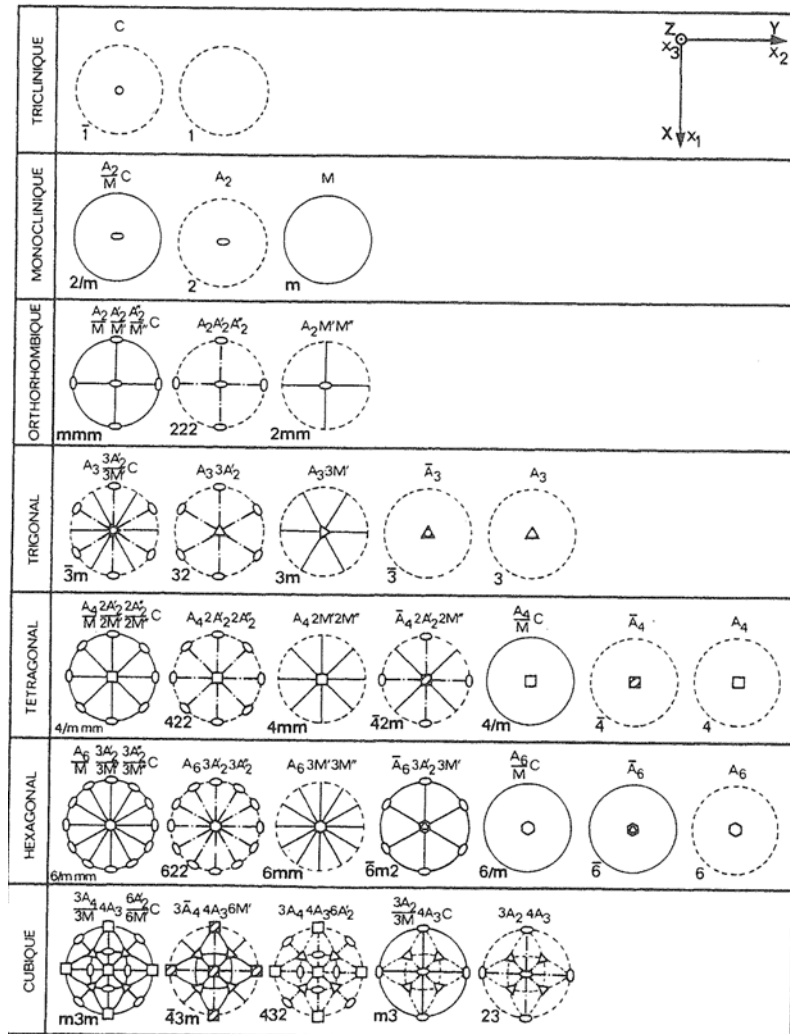


Figure 3.8. Les 32 classes de symétrie ponctuelle des cristaux.

3.3 Exemples de structures

3.3.1 Structure hexagonale compacte

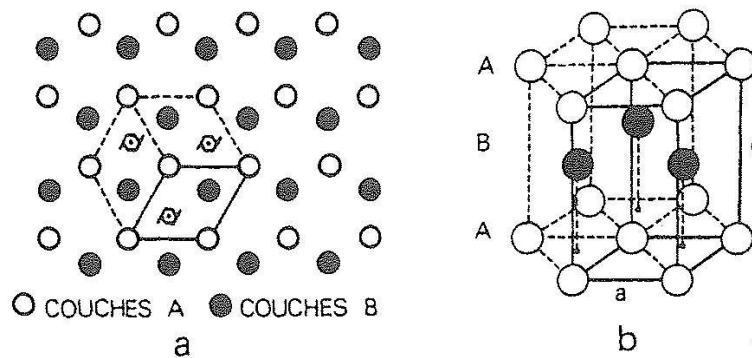


Figure 3.9. Structure hexagonale compacte.

3.3.2 Structure cubique compacte (cfc)

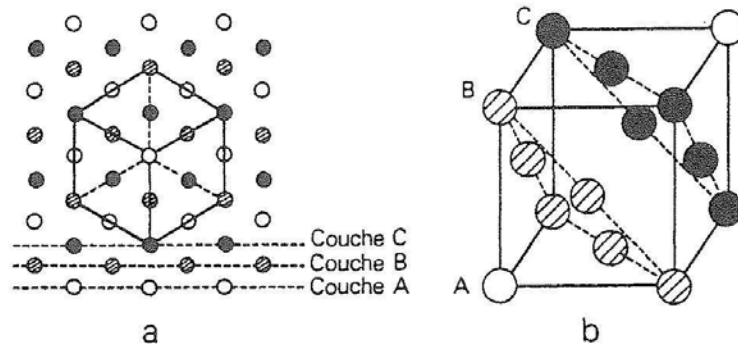


Figure 3.10. Structure cubique compacte.

3.3.3 ZnO, AlN, CdS : système hexagonal de symétrie 6mm

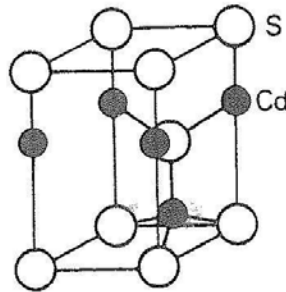


Figure 3.11. Système hexagonal 6mm.

3.3.4 LiNbO₃ et LiTaO₃ : système trigonal de symétrie 3m

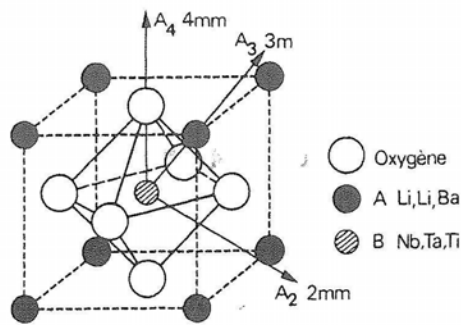


Figure 3.12. Système trigonal 3m.

3.4 Introduction aux tenseurs

3.4.1 Relations linéaires dans un milieu anisotrope

Dans un cristal, une cause appliquée suivant une direction donne en général naissance à un effet orienté dans une autre direction. Par exemple, la relation entre induction et champ électrique est

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \text{ ou } \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \text{ ou } D_i = \varepsilon_{ij} E_j \quad (3.1)$$

Les deux premières notations utilisent les vecteurs et matrices. La dernière expression est typiquement tensorielle et utilise la convention de la sommation sur les indices répétés (ou convention d'Einstein).

D_i et E_j sont des tenseurs de rang 1 ; ε_{ij} est un tenseur de rang 2.

La donnée des composantes du tenseur ne suffit pas à le déterminer, il faut de plus imposer sa transformation dans un changement d'axes de référence : on ne change pas la signification physique en faisant tourner les axes, seulement la représentation du tenseur.

3.4.2 Matrice de changement d'axes de référence

Soient e_1, e_2, e_3 et e'_1, e'_2, e'_3 deux systèmes d'axes de référence. Les composantes du nouveau système d'axes dans l'ancien sont contenues dans une matrice α telle que (une matrice, pas un tenseur !)

$$e'_i = \alpha_i^k e_k \text{ avec } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Inversement $e_k = \beta_k^j e'_j$ avec $\alpha_i^k \beta_k^j = \delta_{ij}$ avec δ_{ij} le symbole de Kronecker. Si les repères sont orthonormés alors $\beta = \alpha^T$ (T : transposition).

Les coordonnées d'un vecteur obéissent à la loi de transformation :

$$x'_i = \beta_k^i x_k \text{ avec } \mathbf{x} = x_k e_k = x'_i e'_i \quad (3.3)$$

Dans le cas où les repères sont orthonormés, les coordonnées d'un vecteur obéissent à la même équation de transformation que les vecteurs de base : $x'_i = \alpha_i^k x_k$.

3.4.3 Définition d'un tenseur

- Une grandeur physique scalaire (température, énergie, etc.) est invariante du repère choisi : $f(x_1, x_2, x_3) = f(x'_1, x'_2, x'_3)$; c'est un tenseur d'ordre 0.
- Un tenseur de rang 1 (ou vecteur) se transforme dans un changement d'axes comme les vecteurs de base, soit

$$A'_i = \alpha_i^k A_k \quad (3.4)$$

- Un tenseur de rang 2, ensemble de 9 grandeurs A_{ij} se transforme suivant la loi

$$A_{ij} = \alpha_i^k \alpha_j^l A_{kl} \quad (3.5)$$

- La définition s'étend sans problème à un rang quelconque, par exemple 3 :

$$A_{ijk} = \alpha_i^l \alpha_j^p \alpha_k^q A_{lpq} \quad (3.6)$$

- Le gradient d'un vecteur, $\partial A_i / \partial x_k$, est un tenseur.
- La trace A_{ii} d'un tenseur d'ordre 2 A_{ij} est un tenseur d'ordre 0.
- La relation linéaire entre deux tenseurs est un tenseur. Par exemple $D_i = \varepsilon_{ij} E_j$ implique que ε_{ij} est un tenseur de rang 2.

3.5 Elasticité

3.5.1 Déformations

Soit un point \mathbf{x} de coordonnées x_1, x_2, x_3 . Les déplacements \mathbf{u} sont fonction de \mathbf{x} , donc $u_i(x_j + dx_j) = u_i(x_j) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$ au premier ordre. $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, le gradient des déplacements, est un tenseur d'ordre 2.

On sépare ce gradient en partie symétrique (*tenseur des déformations* S_{ij}) et antisymétrique selon

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = S_{ij} + \Omega_{ij} \text{ avec } S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ et } \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.7)$$

Seule la partie symétrique du gradient des déplacement mesure une déformation locale du réseau. La partie antisymétrique mesure les rotations locales.

La dilatation (variation locale du volume) est $S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, soit la trace du tenseur des déformations.

Les termes diagonaux S_{11} , S_{22} , S_{33} correspondent à des mouvements longitudinaux, les termes $S_{ij}, i \neq j$ à des mouvements de cisaillement.

3.5.2 Contraintes

À la différence d'un fluide, les efforts de cisaillement se transmettent à travers une surface. *Trois forces indépendantes peuvent d'exercer sur une surface : une contrainte de traction-compression et deux contraintes de cisaillement.*

Sur la face orthogonale à x_1 d'un cube élémentaire, la force par unité de surface ou tension mécanique est $T_{11} + T_{21} + T_{31}$ (et des formules similaires pour les faces orthogonales à x_2 et x_3).

T_{ij} est un tenseur de rang 2 symétrique, le tenseur des contraintes. Pour une surface élémentaire de vecteur normal \mathbf{l} , la tension mécanique est $T_{ik} l_k$.

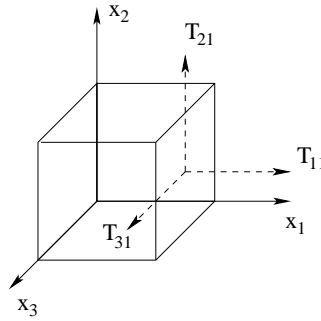


Figure 3.13. Représentation des trois contraintes s'exerçant sur la face 1 (orthogonale à l'axe x_1) d'un cube élémentaire.

L'équation de la dynamique s'écrit (avec f_i les forces internes)

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

3.5.3 Loi de Hooke

L'expérience montre que le comportement élastique de la plupart des solides dans le cas de petites déformations obéit à la *loi de Hooke* :

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \quad (3.9)$$

c'est-à-dire que les contraintes sont une fonction linéaire des déplacements.

c_{ijkl} est le tenseur des rigidités, de rang 4 il a donc a priori $3^4 = 81$ composantes. Mais la symétrie de T_{ij} et S_{kl} impose que

$$c_{jikl} = c_{ijkl} \text{ et } c_{ijlk} = c_{ijkl} \quad (3.10)$$

Il n'y a donc que 36 composantes indépendantes au plus.

En définitive, le nombre de composantes indépendantes est fonction du système de symétrie du réseau du cristal considéré.

3.5.4 Notation contractée (ou matricielle)

Du fait des relations de symétries (10) on note

$$(11) \leftrightarrow 1 ; (22) \leftrightarrow 2 ; (33) \leftrightarrow 3$$

$$(23) = (32) \leftrightarrow 4 ; (31) = (13) \leftrightarrow 5 ; (12) = (21) \leftrightarrow 6 \quad (3.11)$$

$$T_{ij} = T_I ; c_{ijkl} = c_{IJ} ; T_I = c_{IJ} S_J$$

$$S_1 = S_{11} ; S_2 = S_{22} ; S_3 = S_{33} ; S_4 = 2S_{23} ; S_5 = 2S_{31} ; S_6 = S_{12} \quad (3.12)$$

Matériaux	Classe	Rigidités (10^{10} M/m ²)					ρ (10^3 kg/m ³)
cub. ou isotrope		c_{11}	c_{12}	c_{44}			
AsGa	$\bar{4}3m$	11.88	5.38	2.83			5.307
SiO ₂	isotrope	7.85	1.61	3.12			2.203
Si	$m\bar{3}m$	16.56	6.39	7.95			2.329
hexagonal		c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	
PZT-4	trans. iso.	13.9	7.8	7.4	11.5	2.6	7.5
ZnO	$6mm$	21.0	12.1	10.5	21.1	4.2	5.676
trigonal		c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	c_{14}
Al ₂ O ₃	$\bar{3}m$	49.7	16.3	11.1	49.8	14.7	-2.3
LiNbO ₃	$3m$	20.3	5.3	7.5	24.5	6.0	0.9
quartz α (SiO ₂)	32	8.7	0.7	1.2	10.7	5.8	-1.8

Tableau 3.1. Constantes élastiques de quelques cristaux.

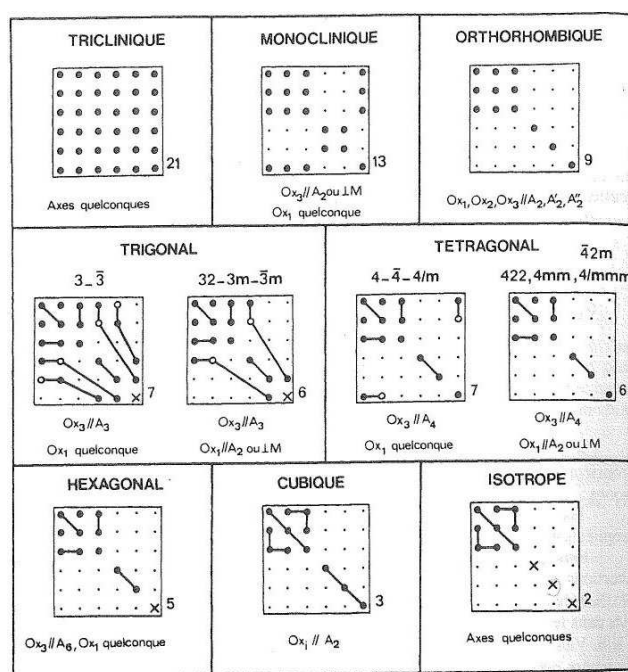


FIG. 3. 9. Composantes $c_{\alpha\beta}$ du tenseur des rigidités élastiques suivant les systèmes de symétrie avec les axes de référence de la figure 2. 22.
 composante - non nulle : ● ○ - nulle : ○
 composantes - égales : ●● - opposées : ●○
 - égales à $(c_{11} - c_{12})/2$: ×
 La symétrie par rapport à la diagonale principale n'est pas mentionnée. Le nombre de composantes indépendantes est indiqué, en bas, à droite de chaque ensemble.

Figure 3.14. Composantes non nulles du tenseur des rigidités en fonction de la classe de symétrie cristalline.

3.6 Piézoélectricité

3.6.1 Origine physique de la piézoélectricité

Effet piézoélectrique direct : sous l'action d'une contrainte ou d'une déformation, une polarisation électrique apparaît (c'est-à-dire une déformation non symétrique de la maille cristalline et/ou du nuage électronique).

Effet piézoélectrique inverse (ou effet Lippman) : un champ électrique appliqué provoque une déformation de la maille cristalline ou une contrainte.

L'effet piézoélectrique n'apparaît que pour les structures cristallines non symétriques.

3.6.2 Relations constitutives

On considérant uniquement le régime linéaire, on peut poser

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (3.13)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ij} E_j \quad (3.14)$$

ou en notation contractée pour la partie mécanique

$$T_I = c_{IJ} S_J - e_{kI} E_k \quad (3.15)$$

$$D_i = e_{iJ} S_J + \varepsilon_{ij} E_j \quad (3.16)$$

Le tenseur $\varepsilon_{ikl} = \varepsilon_{ij}$ est symétrique par rapport à ses deux derniers indices.

3.6.3 Approximation quasi-statique

Du fait du couplage piézoélectrique, une onde électromagnétique accompagne l'onde élastique. Les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique (isolant) sont :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \nabla \cdot \mathbf{D} = 0; \nabla \cdot \mathbf{H} = 0; \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (3.17)$$

Les fréquences mises en jeu sont très petites devant celles des ondes optiques, de sorte que les dérivées temporelles sont très petites :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} \simeq 0 \text{ et } \nabla \times \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D} \simeq 0$$

Cette hypothèse découple les champ électriques et magnétiques. Enfin, le champ électrique étant irrotationnel il dérive d'un potentiel scalaire ϕ selon $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Les équations constitutives deviennent

$$T_I = c_{IJ} S_J + e_{kI} \phi_{,k} \quad (3.18)$$

$$D_i = e_{iJ} S_J - \varepsilon_{ij} \phi_{,j} \quad (3.19)$$

3.6.4 Représentation matricielle des relations constitutives

On regroupe les tenseurs des équation (15-16) en un tableau de constantes :

c_{11}	c_{12}	\dots	\dots	e_{11}	e_{21}	e_{31}
c_{12}	c_{22}	\dots	\dots	e_{12}	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
c_{16}	\dots	\dots	c_{66}	e_{16}	\dots	e_{36}
e_{11}	e_{12}	\dots	e_{16}	ε_{11}	ε_{12}	ε_{13}
e_{21}	\dots	\dots	\dots	ε_{12}	\dots	\dots
e_{31}	\dots	\dots	e_{36}	ε_{13}	\dots	ε_{33}

Cette représentation est commode pour repérer les couplages possibles suivant la symétrie cristalline, mais également pour représenter les données « constantes des matériaux » dans un programme de simulation numérique.

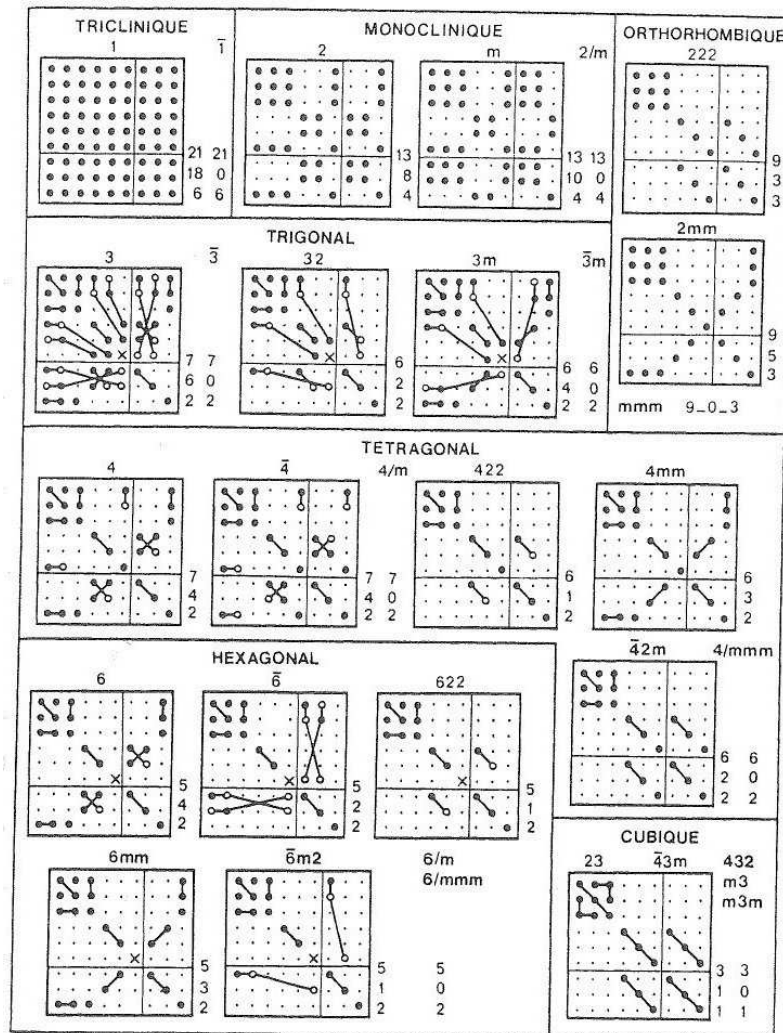


FIG. 3. 14. Composantes des tenseurs élastiques, piézoélectriques, diélectriques suivant les classes de symétrie avec les axes de référence de la figure 2. 22.
 composante - non nulle: ● ○ - nulle: .
 composantes - égales: ●● - opposées: ●○ - égales à $(c_{11} - c_{22})/2$: X
 La symétrie par rapport à la diagonale principale n'est pas mentionnée. Les nombres de constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques indépendantes sont indiqués à droite de chaque ensemble.

Figure 3.15. Composantes non nulles des tenseurs des rigidités, piézoélectrique et diélectrique.

MATÉRIAUX	CLASSE	CONSTANTES PIÉZOÉLECTRIQUES (C/m ²)						PERMITTIVITÉS (10 ⁻¹¹ F/m)		
<i>Système cubique</i>		e_{14}						ϵ^S		
Arséniure de gallium (AsGa)	43m	- 0,16						9,73		
Oxyde de bismuth et de germanium (Bi ₁₂ GeO ₂₀)	23	0,99						34,2		
<i>Système hexagonal</i>		e_{15}	e_{31}	e_{33}	e_{15}^S	e_{33}^S				
Céramique PZT-4	trans. isotrope	12,7	- 5,2	15,1	650	560				
Oxyde de zinc (ZnO)	6mm	- 0,59	- 0,61	1,14	7,38	7,83				
Sulfure de cadmium (CdS)	6mm	- 0,21	- 0,24	0,44	7,99	8,44				
<i>Système tétragonal</i>		e_{14}	e_{15}	e_{31}	e_{33}	e_{11}^S	e_{33}^S			
Paratellurite (TeO ₂)	422	0,22	0	0	0	20	22			
Titanate de baryum (BaTiO ₃)	4mm	0	21,3	- 2,65	3,64	1 744	97			
<i>Système trigonal</i>		e_{11}	e_{14}	e_{15}	e_{22}	e_{31}	e_{33}	e_{11}^S	e_{33}^S	
Niobate de lithium (LiNbO ₃)	3m	0	0	3,7	2,5	0,2	1,3	38,9	25,7	
Tantalate de lithium (LiTaO ₃)	3m	0	0	2,6	1,6	≈ 0	1,9	36,3	38,1	
Quartz (SiO ₂)	32	0,171	-0,0406	0	0	0	0	3,92	4,10	
<i>Système orthorhombique</i>		e_{15}	e_{24}	e_{31}	e_{32}	e_{33}	e_{11}^S	e_{22}^S	e_{33}^S	
Niobate de baryum et de sodium (Ba ₂ NaNb ₂ O ₁₅) ...	2mm	2,8	3,4	- 0,4	- 0,3	4,3	196	201	28	

Tableau 3.2. Constantes piézoélectriques et diélectriques de quelques cristaux.

3.6.5 Conditions aux limites

Conditions aux limites mécaniques

- Pour deux solides rigidement liés, le déplacement est continu en tout point de la frontière Σ entre deux milieux M et M' : $u_i = u'_i$. De même, la tension mécanique est continue : $T_{ij}l_j = T'_{ij}l_j$ avec l_j la normale à Σ .
- Sur une *surface libre*, les déplacements sont non spécifiés et $T_{ij}l_j = 0$.
- Sur une *surface bloquée*, les contraintes sont non spécifiées et $u_i = 0$.

Conditions aux limites électriques

Dans l'approximation quasi-statique, elles relèvent de l'électrostatique.

- A une interface Σ , $\phi = \phi'$ et $E_t = E'_t$ (le potentiel et la partie tangentielle de \mathbf{E} sont continus).
- Si la surface est chargée (interface diélectrique-métal par exemple) alors $(D'_i - D_i)l_i = \sigma$ (σ : densité superficielle de charge). Entre deux diélectriques, la composante normale de \mathbf{D} est continue.
- Si la surface est en court-circuit (par l'intermédiaire d'un film métallique mis à la masse par exemple) alors $\phi = 0$.

3.6.6 Théorème de Poynting et bilan énergétique

En exprimant le travail des forces mécaniques et des forces électriques on obtient le théorème de Poynting pour les milieux piézoélectriques sous la forme :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(E_c + E_p) + \int_{\Sigma} P_j l_j ds \quad (3.20)$$

avec

- l'énergie cinétique $E_c = \int e_c dV$ et $e_c = \frac{1}{2} \rho v_i^2$
- l'énergie potentielle $E_p = \int e_p dV$ et $e_p = \frac{1}{2} (S_{ij} T_{ij} + E_k D_k)$
- le vecteur de Poynting $P_j = -T_{ij} v_i + (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_j$

Comme dans le cas des fluides, le théorème de Poynting exprime que le travail fourni par les sources internes au volume V est partiellement emmagasiné sous forme d'énergie cinétique et potentielle et partiellement rayonnée à travers la frontière Σ . Le flux du vecteur de Poynting représente cette puissance rayonnée.

Chapitre 4

Ondes planes dans les solides

4.1 Rappels sur les problèmes aux valeurs propres

Soit une matrice carrée M_{ij} de dimension $n \times n$, à valeurs réelles ou complexes. Une équation aux valeurs propres λ et aux vecteurs propres u_i est de la forme

$$M_{ij} u_j = \lambda u_i \quad (4.1)$$

Les valeurs propres sont racines du polynôme caractéristique : $|M_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$.

Il y a exactement n valeurs propres $\lambda^{(k)}$ et au plus n vecteurs propres $u_i^{(k)}$ (a priori complexes). Les vecteurs propres sont non nuls et normalisables ($u_i^{(k)} u_i^{(k)} = 1$) ; on les range dans une matrice $X_{ik} = u_i^{(k)}$ de sorte que (4.1) devient

$$M_{ij} X_{jk} = X_{ij} \Lambda_{jk} \text{ avec } \Lambda_{jk} = \lambda^{(k)} \delta_{jk} \quad (4.2)$$

Si X est inversible, alors $M = X \Lambda X^{-1}$.

Si M est réelle symétrique, les valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres orthogonaux : $X^{-1} = X^T$.

En pratique, il existe des algorithmes très performants pour déterminer valeurs et vecteurs propres.

4.2 Solide anisotrope non piézoélectrique

4.2.1 Equation de Christoffel

On néglige la pesanteur dans la relation fondamentale de la dynamique, $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$. Avec la loi de Hooke, $T_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$, on a l'équation d'onde anisotrope :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \quad (4.3)$$

Pour les ondes planes harmoniques de la forme $u_i(t, \mathbf{r}) = \hat{u}_i \exp(i\omega(t - s \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}))$, on obtient l'équation de Christoffel

$$\rho \hat{u}_i = s^2 c_{ijkl} n_j n_k \hat{u}_l \quad (4.4)$$

La lenteur $s(\mathbf{n}) = k(\mathbf{n})/\omega$ (en s/m) est une fonction de la direction repérée par le vecteur unitaire \mathbf{n} . Une quantité du type $\sqrt{c/\rho}$ est homogène à une vitesse.

En introduisant la *tenseur symétrique de Christoffel*, $\Gamma_{il} = c_{ijkl} n_j n_k$, on obtient le problème aux valeurs propres :

$$\rho \hat{u}_i = s^2 \Gamma_{il} \hat{u}_l \quad (4.5)$$

Attention : Γ_{il} dépend de la direction \mathbf{n} .

4.2.2 Cas isotrope

Dans le cas isotrope, les propriétés des ondes sont invariantes avec la direction de propagation. Prenons par exemple x_1 pour direction de propagation :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \text{ avec } c_{44} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \quad (4.6)$$

La matrice est diagonale ; elle possède une valeur propre simple et une valeur propre double.

- L'onde de vitesse $V_L = \sqrt{c_{11}/\rho}$ est une onde de *polarisation longitudinale*, puisque de vecteur propre $\hat{u} = (1, 0, 0)^T$.
- Les ondes de vitesse $V_S = \sqrt{c_{44}/\rho}$ sont de *polarisation transverse* : deux vecteurs propres sont $\hat{u} = (0, 1, 0)^T$ et $\hat{u} = (0, 0, 1)^T$.
- Puisque $c_{12} > 0$, $V_S < V_L / \sqrt{2}$. La vitesse longitudinale est toujours plus grande que la vitesse transverse.
- Les propriétés précédentes sont vraies pour toute solution de l'équation d'onde (pour le voir, considérer le spectre d'ondes planes).

4.2.3 Exemples pour un cristal cubique

En considérant la forme du tenseur élastique des cristaux cubiques :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} c_{11}n_1^2 + c_{44}(n_2^2 + n_3^2) & (c_{12} + c_{44})n_1n_2 & (c_{12} + c_{44})n_1n_3 \\ \cdot & c_{11}n_2^2 + c_{44}(n_1^2 + n_3^2) & (c_{12} + c_{44})n_2n_3 \\ \cdot & \cdot & c_{11}n_3^2 + c_{44}(n_1^2 + n_2^2) \end{pmatrix}$$

Propagation suivant [1,0,0] — Γ est diagonale, avec une valeur propre simple, c_{11} , et une valeur propre double, c_{44} . Il existe une onde longitudinale de vitesse $\sqrt{c_{11}/\rho}$ et deux ondes transversales (de cisaillement ou shear) de vitesse $\sqrt{c_{44}/\rho}$.

Propagation suivant [1,1,0] — On obtient 3 valeurs propres distinctes : c_{44} , $\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ et $\frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) + c_{44}$. Il existe une onde purement transversale polarisée suivant x_3 , de vitesse $\sqrt{c_{44}/\rho}$; une onde quasi-transversale de vitesse $\sqrt{(c_{11} - c_{12})/2\rho}$; une onde quasi-longitudinale de vitesse $\sqrt{(2c_{44} + c_{11} + c_{12})/2\rho}$.

4.2.4 Lentéur, vitesse de phase et vitesse d'énergie

Pour les ondes planes harmoniques :

- La densité d'énergie cinétique est $e_c = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{u}_i \hat{u}_i$.
- La densité d'énergie potentielle est $e_p = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} = \frac{1}{2} \omega^2 s^2 \Gamma_{il} \hat{u}_i \hat{u}_l$. Avec l'équation de Cristoffel, on voit que $e_p = e_c$: *les énergies cinétique et potentielle sont égales pour les ondes planes*.
- La densité d'énergie totale est donc : $e = e_c + e_p = \rho \omega^2 \hat{u}_i \hat{u}_i$.
- Le vecteur de Poynting est

$$P_i = -T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} = -c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial t} = s \omega^2 c_{ijkl} \hat{u}_j \hat{u}_k n_l$$
- La *vitesse d'énergie* est par définition $V_i^e = P_i / e$

Une relation importante liant vitesse de phase et vitesse d'énergie est $V_i^e n_i = v$.

- On peut montrer l'égalité de la vitesse d'énergie et de la vitesse de groupe spatiale.

4.3 Surfaces caractéristiques

4.3.1 Surface des lenteurs

Par définition, la *surface des lenteurs* est le lieu du vecteur $\mathbf{s} = s\mathbf{n}$ en fonction de \mathbf{n} (c'est une représentation spatiale de la relation de dispersion $\mathbf{k}(\omega, \mathbf{n})/\omega$). La *vitesse d'énergie* (ou *vitesse de groupe spatiale*) est normale à cette surface.

Il existe toujours trois surfaces des lenteurs : une *quasi-L* et deux *quasi-S*. Elles sont symétriques par rapport à l'origine.

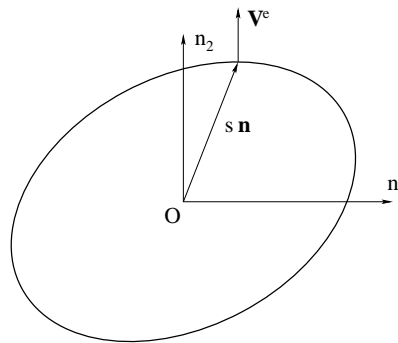


Figure 4.1. Surface des lenteurs.

4.3.2 Surface d'onde

Par définition, la *surface d'onde* est le lieu du vecteur vitesse d'énergie \mathbf{V}^e en fonction de \mathbf{n} . C'est la surface atteinte au bout d'un temps unitaire par l'onde issue d'un point source à la fréquence ω (notion liée à la fonction de Green) ; c'est aussi une surface équiphasse. \mathbf{n} est normal à la surface d'onde ; les plans d'onde lui sont tangents.

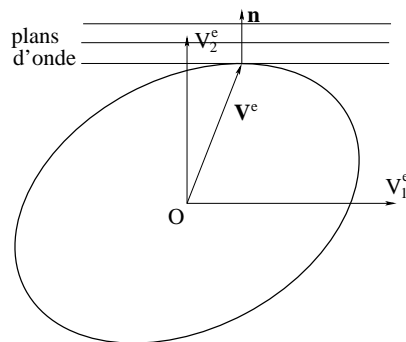


Figure 4.2. Surface d'onde.

4.3.3 Surface des vitesses

Par définition, la *surface des vitesses* est lieu du vecteur $v\mathbf{n}$ en fonction de \mathbf{n} . C'est le lieu de la projection orthogonale de l'origine sur les plans tangents à la surface d'onde. Réciproquement, la surface d'onde est l'enveloppe de la famille des plans perpendiculaires à l'extrémité du vecteur \mathbf{v} .

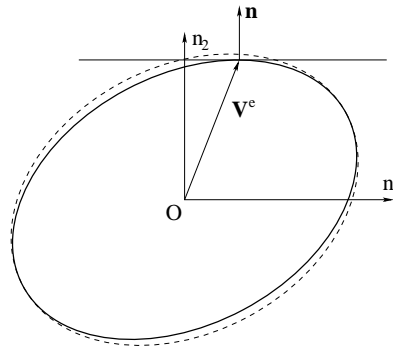


Figure 4.3. Surface des vitesses.

4.3.4 Exemple : silicium (Si, cubique m3m)

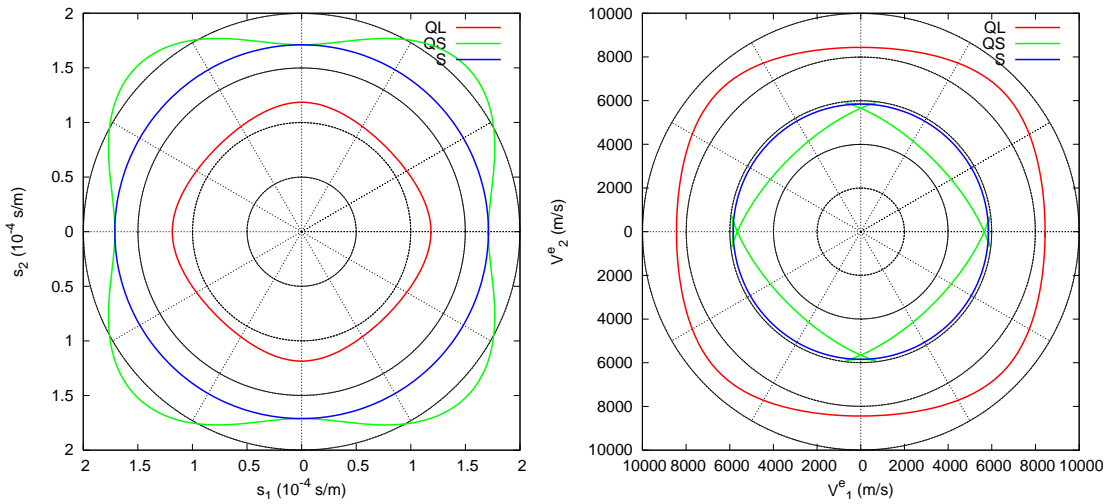


Figure 4.4. Cas du silicium. (a) Surfaces des lenteurs. (b) Surfaces d'onde.

4.3.5 Exemple : rutile (TiO₂, tétragonal 4/mmm)

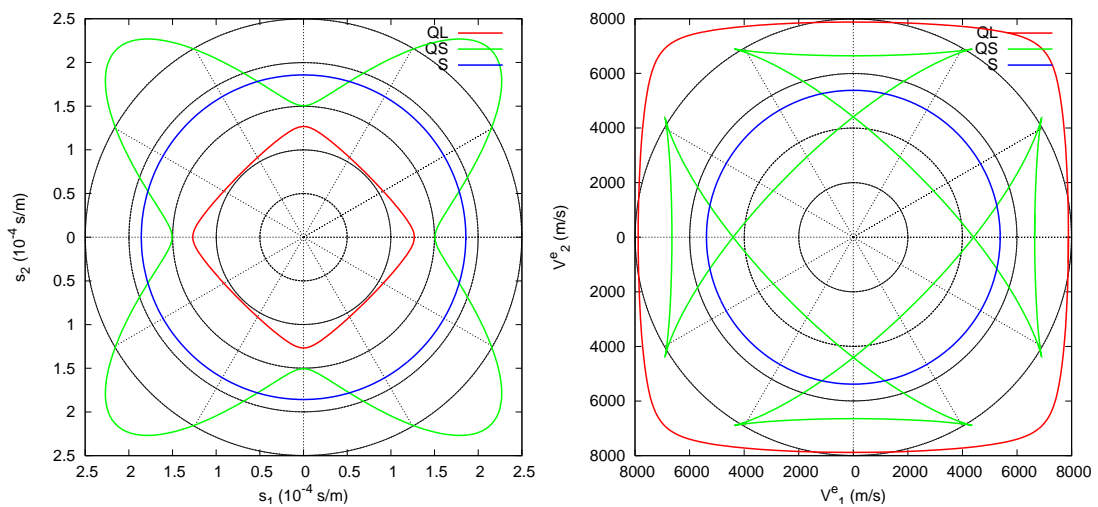


Figure 4.5. Cas du rutile. (a) Surfaces des lenteurs. (b) Surfaces d'onde.

4.3.6 Exemple : corindon, saphir, rubis (Al_2O_3 , trigonal $\bar{3}m$)

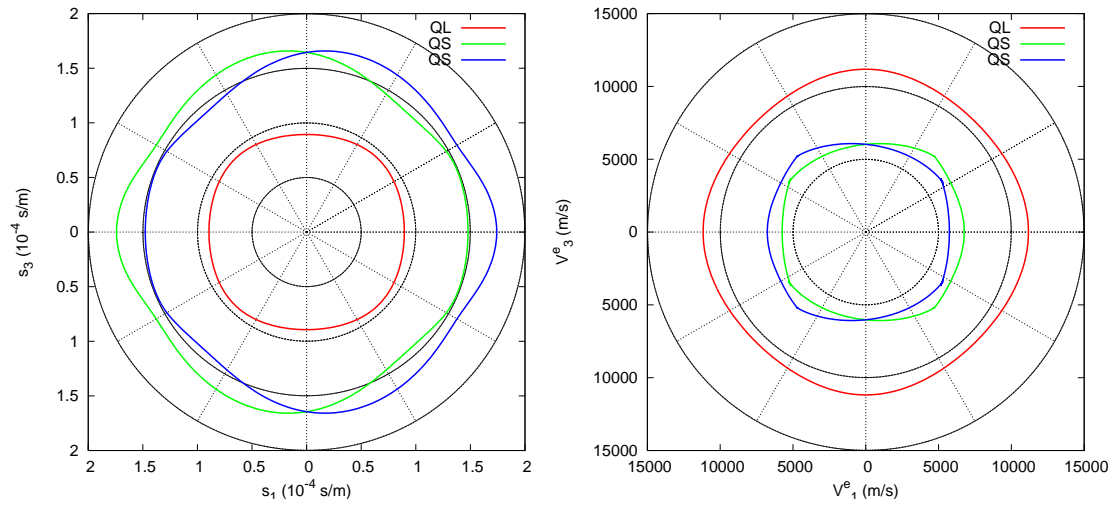


Figure 4.6. Cas du corindon. (a) Surfaces des lenteurs. (b) Surfaces d'onde.

4.3.7 Atténuation

- Les pertes acoustiques dans les solides sont dues à la conduction thermique, à l'interaction avec les phonons, aux diffusions sur les défauts, etc. Elles sont grossièrement proportionnelles à ω^2 .
- Les pertes sont plus grandes dans les métaux que dans les isolants ; dans les polycristaux que dans les monocristaux.

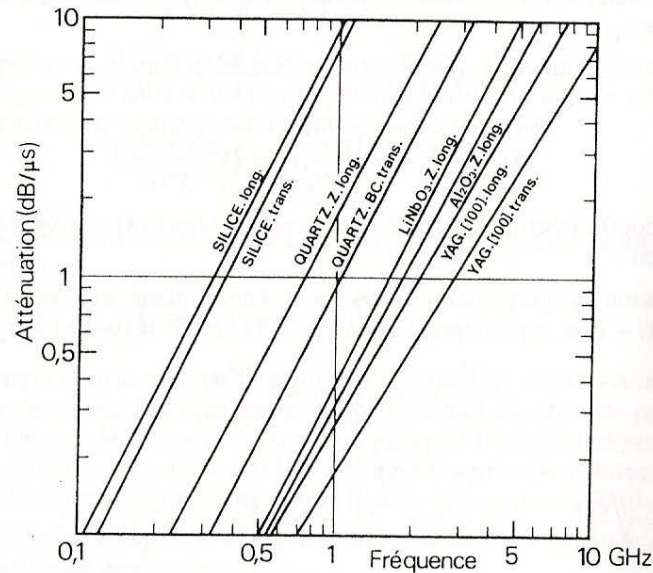


Figure 4.7. Atténuation en fonction de la fréquence dans quelques cristaux.

4.4 Solide anisotrope piézoélectrique

4.4.1 Constantes durcies pour les ondes planes harmoniques

L'équation fondamentale de la dynamique et l'équation de poisson

$$-i\omega s \hat{T}_{ij} n_j = -\rho \omega^2 \hat{u}_i \text{ et } \hat{D}_j n_j = 0 \quad (4.7)$$

avec les équation constitutives

$$\hat{T}_{ij} = -i\omega s(c_{ijkl}n_k \hat{u}_l + e_{kij}n_k \hat{\phi}) \text{ et } \hat{D}_j = -i\omega s(e_{jkl}n_k \hat{u}_l - \varepsilon_{jk}n_k \hat{\phi}) \quad (4.8)$$

mènent à

$$\rho \hat{u}_i = s^2 (\Gamma_{il} \hat{u}_l + \gamma_i \hat{\phi}) \text{ et } \gamma_l \hat{u}_l = \varepsilon \hat{\phi} \text{ avec } \gamma_i = e_{kij}n_j n_k \text{ et } \varepsilon = \varepsilon_{jk}n_j n_k \quad (4.9)$$

d'où en éliminant le potentiel l'équation de Christoffel avec constantes durcies

$$\rho \hat{u}_i = s^2 \bar{\Gamma}_{il} \hat{u}_l \text{ avec } \bar{\Gamma}_{il} = \Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon} \quad (4.10)$$

ce qui fournit un moyen commode d'obtenir la partie acoustique des ondes planes harmoniques dans un milieu piézoélectrique.

4.4.2 Couplage électromécanique

Considérons par exemple la propagation selon [010] (axe x_2) dans le niobate de lithium (LiNbO_3 , trigonal 3m)

$$\Gamma = \begin{pmatrix} c_{66} & 0 & 0 \\ \cdot & c_{11} & -c_{14} \\ \cdot & \cdot & c_{44} \end{pmatrix} \text{ avec } c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$$

Il y a une onde transverse de vitesse $\sqrt{c_{66}/\rho}$ et une onde QS et une onde QL de vitesses données par $2\rho v^2 = \Gamma_{22} + \Gamma_{33} \pm \sqrt{(\Gamma_{22} - \Gamma_{33})^2 + 4\Gamma_{23}^2}$.

D'autre part, on trouve

$$\gamma_1 = 0; \gamma_2 = e_{22}; \gamma_3 = e_{15}; \varepsilon = \varepsilon_{11}$$

donc $\bar{\Gamma}_{11} = \Gamma_{11}; \bar{\Gamma}_{22} = \Gamma_{22} + \gamma_2^2/\varepsilon; \bar{\Gamma}_{23} = \Gamma_{23} + \gamma_2 \gamma_3/\varepsilon; \bar{\Gamma}_{33} = \Gamma_{33} + \gamma_3^2/\varepsilon$.

La piézoélectricité conduit à une variation des vitesses QS et QL. On prend pour définition du couplage électromécanique le quotient sans dimension

$$K^2 = 2 \frac{\Delta v}{v} \quad (4.11)$$

4.4.3 ZnO (hexagonal 6mm)

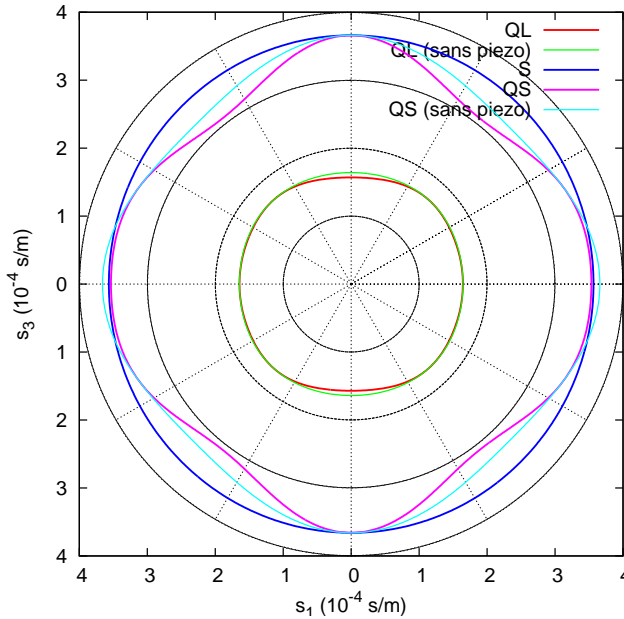


Figure 4.8. Surfaces des lenteurs du ZnO.

4.4.4 Quartz (trigonal 32)

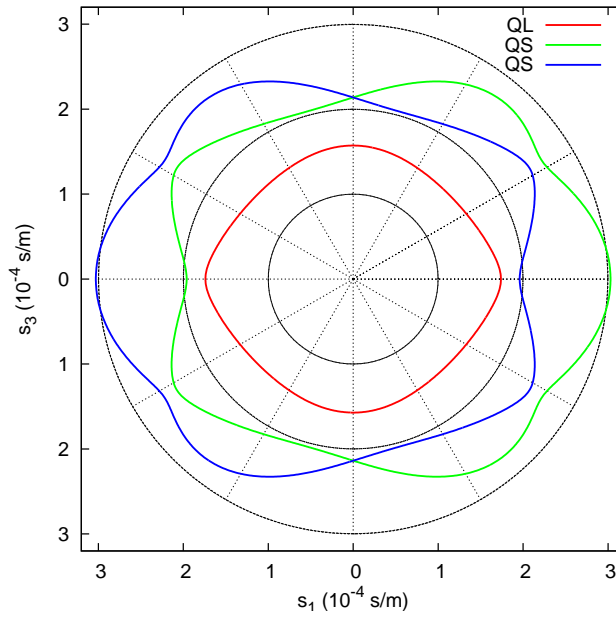


Figure 4.9. Surfaces des lenteurs du quartz.

4.4.5 LiNbO₃ (trigonal 3m)

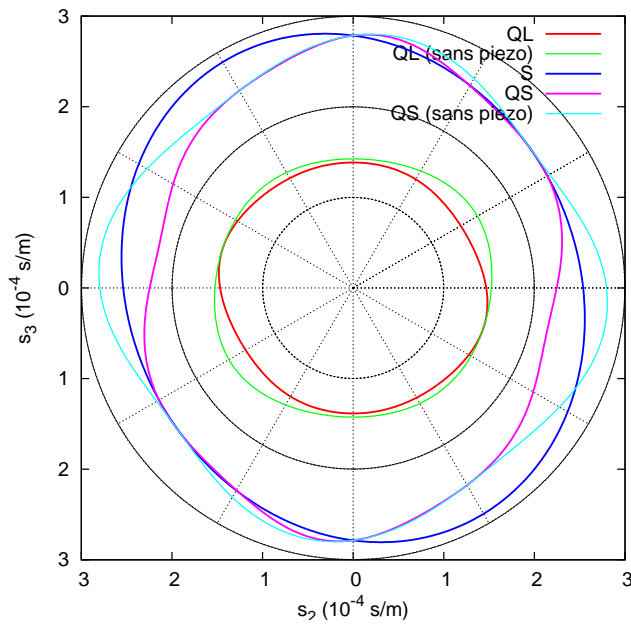


Figure 4.10. Surfaces des lenteurs du niobate de lithium.

4.5 Réflexion et réfraction

4.5.1 Propriétés générales

- La polarisation des ondes dans un milieu fluide idéal n'a qu'une composante longitudinale acoustique.

- La polarisation des ondes dans un solide élastique comporte 3 composantes acoustiques, 1 majoritairement longitudinale et 2 majoritairement transversales (shear).
- La polarisation des ondes dans les milieux piézoélectriques comporte 4 composantes, provenant des 3 degrés de liberté acoustiques (u_i) et du degré de liberté électrique (ϕ). Il y a 1 polarisation majoritairement longitudinale, 2 majoritairement transversales et 1 majoritairement électrostatique.
- Une polarisation pure incidente donne naissance à 4 ondes réfléchies et à 4 ondes transmises dans un milieu piézoélectrique (1 et 1 dans un fluide ; 3 et 3 dans un solide élastique).
- La fréquence et la projection du vecteur d'onde sur l'interface se conservent.

4.5.2 Exemple : interface silicium - silice

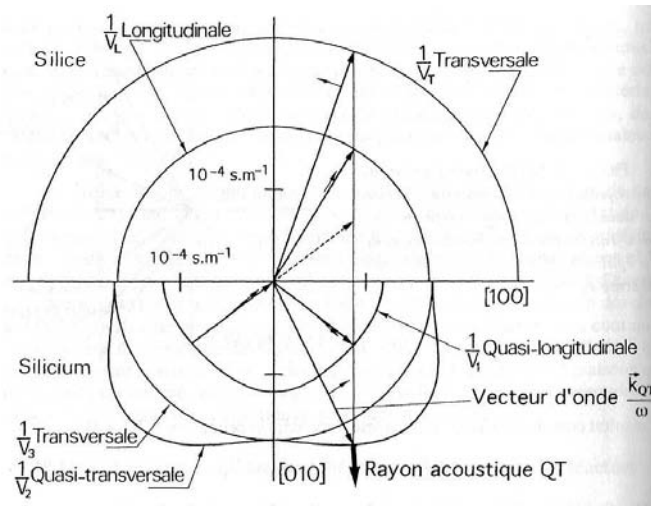


Figure 4.11. Réflexion et réfraction à l'interface silicium - silice.

4.5.3 Déplacements et contraintes généralisés

On définit les *contraintes généralisées* par $\bar{T}_{ij} = T_{ij}$ pour $i = 1, 2, 3$ et $\bar{T}_{4j} = D_j$ pour $i = 4$. De même, on définit les *déplacements généralisés* par $\bar{u}_i = u_i$ pour $i = 1, 2, 3$ et $\bar{u}_4 = \phi$.

On peut ainsi écrire les relations constitutives sous la forme

$$\bar{T}_{ij} = \bar{c}_{ijkl} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \quad \text{avec} \quad \bar{c}_{ijkl} = c_{ijkl}, \bar{c}_{ijk4} = +e_{kij}, \bar{c}_{4jkl} = e_{jkl}, \bar{c}_{4j44} = -\varepsilon_{jk} \quad (4.12)$$

et l'équation fondamentale de la dynamique et l'équation de Poisson

$$\frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_j} = \bar{\rho}_{ij} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \bar{\rho} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

On est ainsi ramené à des équations pseudo-mécaniques semblables à celles des milieux élastiques. En particulier, l'équation de Christoffel piézoélectrique peut être écrite $\bar{\rho}_{ij} \bar{u}_j =$

$s^2 (\bar{c}_{ijkl} n_j n_k) \bar{u}_l$, qui se présente sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé (du type $A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$).

4.5.4 Equation aux valeurs propres

Soit un problème de réflexion-transmission sur une interface plane normale à x_1 . Les lenteurs s_2 et s_3 se conservent. *Mais quelles sont les valeurs possibles de s_1 ?*

On peut mettre les équations (4.12) et (4.13) sous la forme

$$\begin{pmatrix} -\bar{c}_{i12l} s_2 - \bar{c}_{i13l} s_3 & \delta_{il} \\ \sum_{j,k=2}^3 \bar{c}_{ijkl} s_j s_k + \bar{\rho}_{il} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_l \\ \tau_{l1} \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} c_{i11l} & 0 \\ \bar{c}_{i21l} s_2 + \bar{c}_{i31l} s_3 & \delta_{il} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_l \\ \tau_{l1} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

avec $\tau_{ij} = T_{ij}/(-i\omega)$. Il s'agit d'un problème aux valeurs propres généralisé, de la forme

$$A\mathbf{h} = s_1 B\mathbf{h} \quad (4.15)$$

dans lequel les matrices A et B dépendent de s_2 et s_3 (et des constantes du milieu). Le vecteur \mathbf{h} a 8 composantes, les 4 \bar{u}_l et les 4 τ_{l1} .

- Il y a 8 valeurs propres, correspondant aux 8 valeurs possibles pour s_1 . *Ces valeurs propres appartiennent par paires à chacune des 4 surfaces des lenteurs* (le cas échéant à leurs branches imaginaires). Ces paires sont soit réelles de signes opposés, soit complexes conjuguées.
- Les 8 vecteurs propres sont appelés *modes partiels*. Il y a 4 modes partiels *réfléchis* et 4 modes partiels *transmis*.

4.5.5 Exemple : modes partiels propagatifs et inhomogènes du rutile

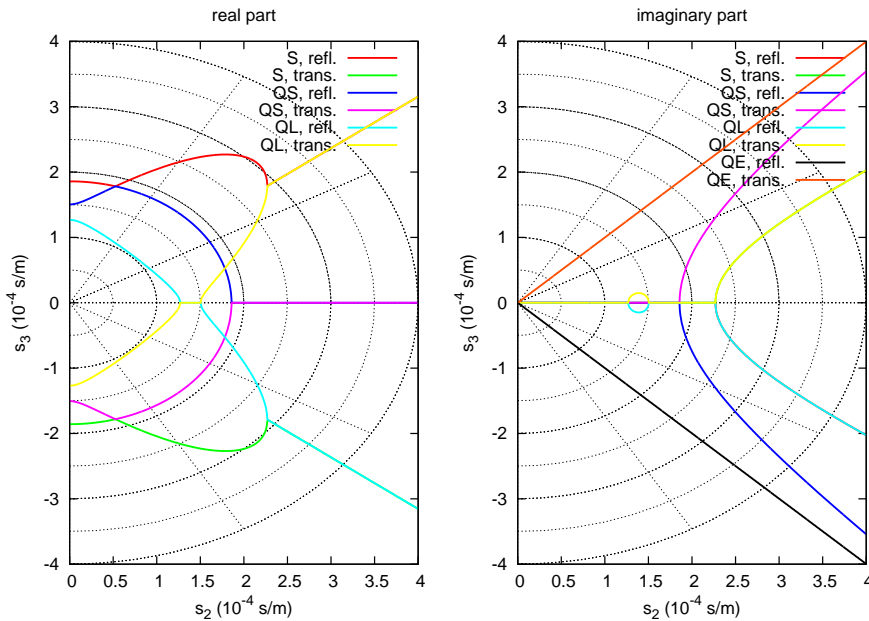


Figure 4.12. Modes partiels du rutile.

4.5.6 Exemple : modes partiels propagatifs et inhomogènes du LiNbO_3

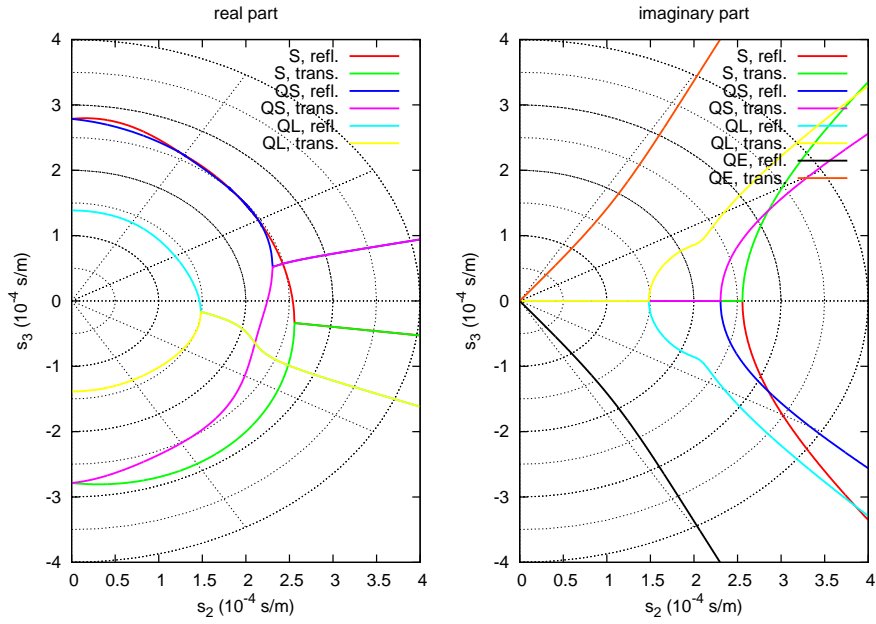


Figure 4.13. Modes partiels du niobate de lithium

4.5.7 Méthode de solution numérique

1. On résout le problème aux valeurs propres (4.15) dans chacun des milieux 1 et 2, ce qui donne pour chacun les 8 valeurs propres ($s_{1r}^{(1)}$ et $s_{1r}^{(2)}$) et 8 vecteurs propres ou polarisations ($\mathbf{h}_r^{(1)}$ et $\mathbf{h}_r^{(2)}$).
2. La solution générale dans chaque milieu est une superposition des 8 modes partiels, soit

$$\mathbf{h}(t, \mathbf{x}) = \sum_{r=1}^8 a_r \mathbf{h}_r^{(1 \text{ ou } 2)} \exp(i\omega(t - s_{1r}^{(1 \text{ ou } 2)} x_1 - s_2 x_2 - s_3 x_3)) \quad (4.16)$$

3. On partage les modes partiels dans le milieu 1 en 4 MP incidents (leurs amplitudes sont

connues) et 4 MP réfléchis. On partage les modes partiels dans le milieu 2 en 4 MP transmis et 4 MP incidents (leurs amplitudes sont nulles).

- Les 8 composantes de \mathbf{h} sont continues à l'interface, ce qui donne 8 équations linéaires pour 8 inconnues (les MP réfléchis et transmis). Le problème est donc entièrement déterminé.

4.5.8 Exemple : interface silicium - silice, et réciproquement

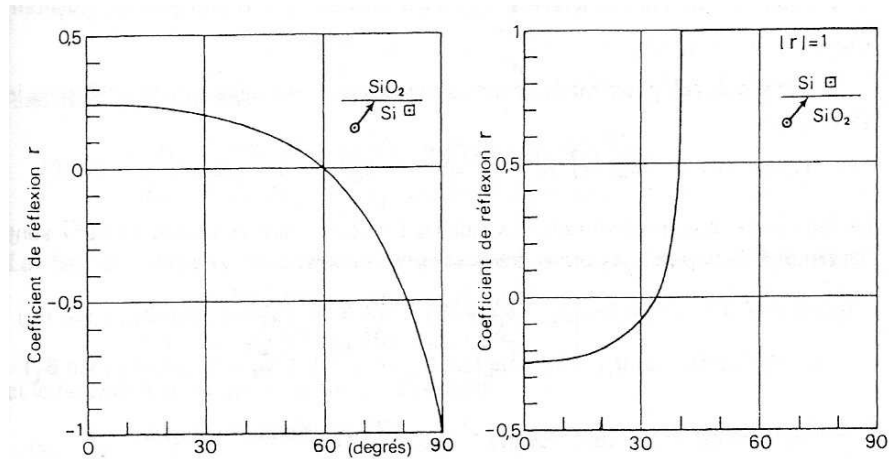
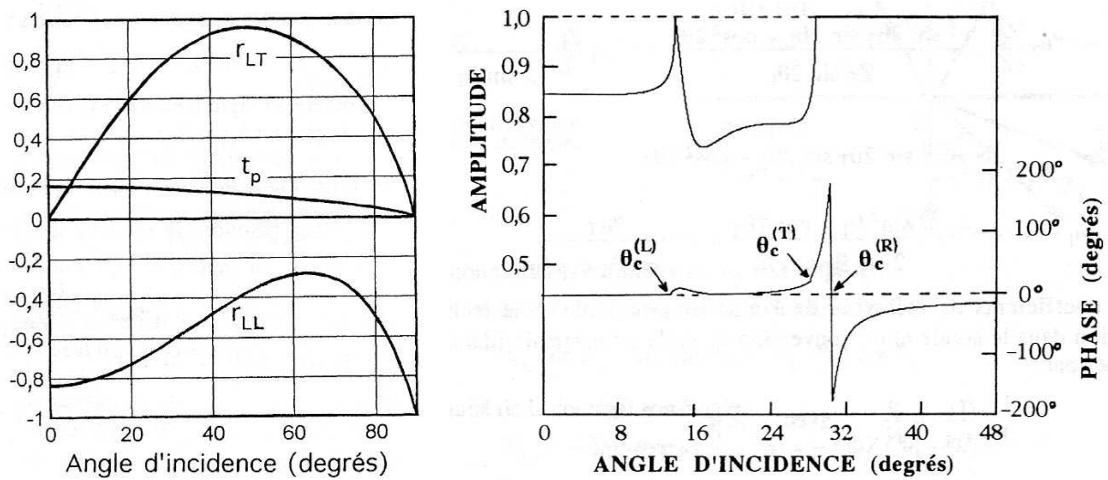


Figure 4.14. Réflexion à l'interface silicium - silice pour une onde incidente purement transverse (S).

4.5.9 Exemple : interface duralumin - eau, et réciproquement



Onde incidente L dans le duralumin

Coefficient de réflexion r_{LL} dans l'eau

Figure 4.15. Réflexion à l'interface duralumin - eau.

Chapitre 5

Ondes élastiques guidées

5.1 Ondes de surface

Une onde de surface est une solution de l'équation d'onde qui respecte les conditions aux limites sur la surface d'un milieu semi-infini surmonté du vide. Elle est guidée si son amplitude décroît dans la profondeur.

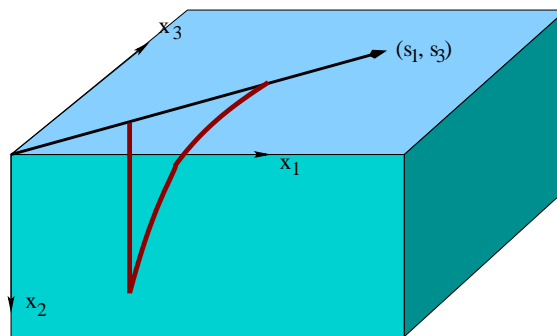


Figure 5.1. Représentation d'une onde de surface.

- On suppose imposer la lenteur en surface (le vecteur d'onde), soit s_1 et s_3 . Seules les

ondes partielles réfléchies peuvent participer à l'onde de surface (soit 3 ondes partielles pour un solide élastique et 4 pour un solide piézoélectrique).

- *Conditions aux limites élastiques* : pour une surface libre, $T_{i2} = 0$.
- *Conditions aux limites électriques* (cas piézoélectrique) : pour une surface libre, pas de charges à la surface ; pour une surface métallisée et court-circuitée (film métallique infiniment mince), $\phi = 0$.

5.1.1 Règle de sélection des modes partiels (réfléchis)

Règle : On étudie les courbes de lenteur dans le plan sagittal (normal à la surface et contenant la direction de propagation).

- Un mode partiel propagatif (s_2 réelle) est sélectionné si le vecteur de Poynting rentre vers l'intérieur du substrat, soit $P_2 > 0$.
- Un mode inhomogène est sélectionné si $\text{Im}(s_2) < 0$, de sorte que l'amplitude du mode partiel décroisse dans le substrat.

On reclasse les modes partiels réfléchis de 1 à 3 (élastique seul) ou 4 (piézoélectrique).

Forme de la solution : *superposition des modes partiels réfléchis*

$$\mathbf{h}(t, \mathbf{x}) = \left(\sum_{r=1}^{3 \text{ ou } 4} a_r \mathbf{h}_r \exp(-i\omega s_{2r} x_2) \right) \exp(i\omega(t - s_1 x_1 - s_3 x_3)) \quad (5.1)$$

avec $\mathbf{h}_l = (u_l, \tau_{l2})$ le vecteur des déplacements et contraintes généralisés, s_{2r} et \mathbf{h}_r les valeurs et vecteurs propres caractérisant les modes partiels, et a_r les amplitudes des modes partiels dans la superposition.

5.1.2 Cas des milieux solides non piézoélectriques

Expression du déterminant des conditions aux limites $T_{i2} = 0$ pour $x_2 = 0$. Il y a 3 conditions aux limites pour 3 amplitudes inconnues :

$$\tau_{i2} = \sum_{r=1}^3 a_r \tau_{i2}^{(r)} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

Il existe une solution ssi le déterminant des conditions aux limites est nul, soit

$$\Delta = |\tau_{i2}^{(r)}| = \begin{vmatrix} \tau_{12}^{(1)} & \tau_{12}^{(2)} & \tau_{12}^{(3)} \\ \tau_{22}^{(1)} & \tau_{22}^{(2)} & \tau_{22}^{(3)} \\ \tau_{32}^{(1)} & \tau_{32}^{(2)} & \tau_{32}^{(3)} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

Le déterminant est fonction de s_1 et s_3 (des lenteurs de surface). Cette équation définit une courbe de lenteur. *L'onde de surface est parfaitement guidée si tous les modes partiels sont inho-*

mogènes : la vitesse de l'onde de surface est alors nécessairement plus petite que celles des ondes volume.

On considère les plus souvent les *ondes de Rayleigh*, dont la *polarisation* (les déplacements) est *purement sagittale*. Les *ondes de Bleustein-Gulyaev* (seulement dans le cas piézoélectrique) sont de *polarisation transverse pure*.

5.1.3 Ondes de Rayleigh et de Bleustein-Gulyaev

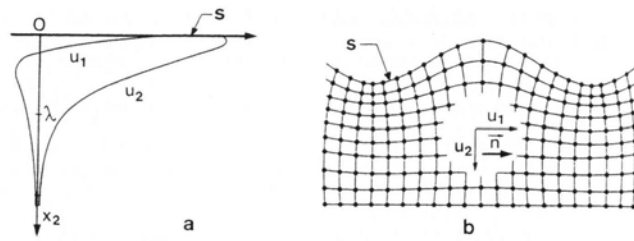


Figure 5.2. Onde de surface de type Rayleigh (R). La polarisation est elliptique et dans le plan sagittal.

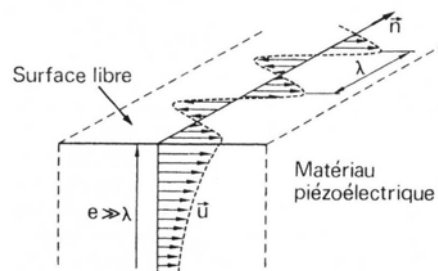


Figure 5.3. Onde de surface de type Bleustein-Gulyaev (BG).

5.1.4 Exemples d'ondes de Rayleigh

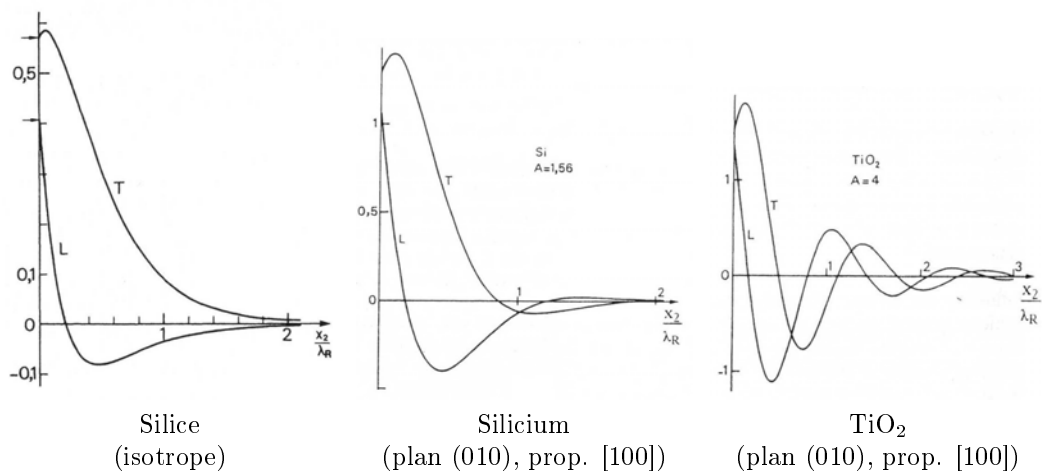


Figure 5.4. Polarisation de l'onde de Rayleigh pour trois solides non piézoélectriques.

5.1.5 Courbes de lenteur pour le silicium et le rutile

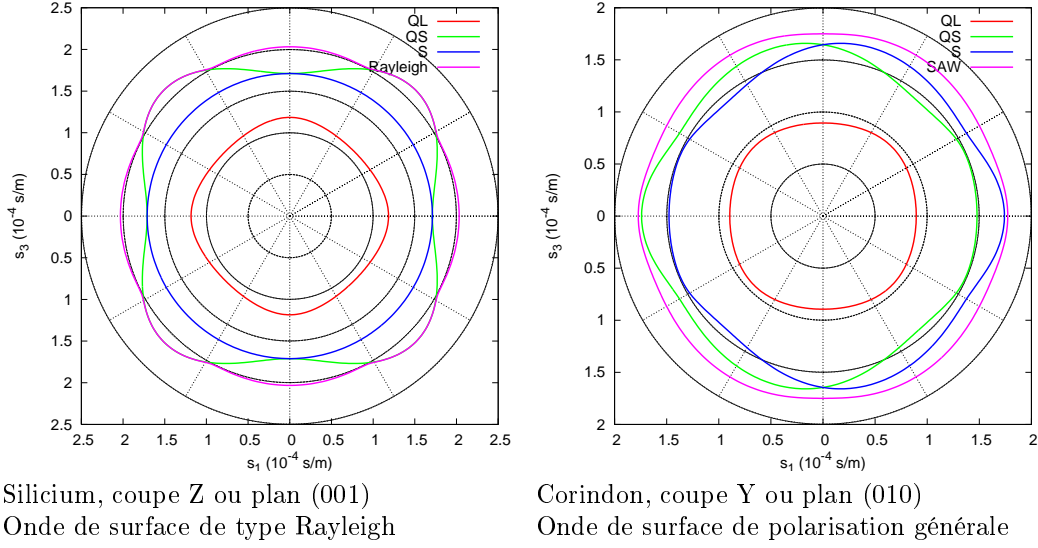


Figure 5.5. Placement de la courbe de lenteur pour l'onde de surface par rapport aux courbes de lenteur des ondes de volume pour le silicium et le rutile.

5.1.6 Cas piézoélectrique

Surface libre Il y a maintenant 4 modes partiels réfléchis. *Il n'y a pas de charges accumulées sur la surface*, soit $\Delta D_2 = 0$ (le déplacement électrique est continu).

Côté vide, le potentiel satisfait l'équation de Poisson $s_i s_i \phi = 0$, d'où (le signe choisi assure que la solution est évanescente dans le vide) $s_2 = +i \sqrt{s_1^2 + s_3^2}$.

La composante normale du déplacement électrique à la surface $x_2 = 0$ est donc $D_2 = -s_2 \varepsilon_0 \phi = -i \sqrt{s_1^2 + s_3^2} \varepsilon_0 \phi$.

En plus des tensions mécaniques nulles (5.2), on a à la surface $x_2 = 0$

$$D_2 + i s \varepsilon_0 \phi = 0 \text{ en posant } s = \sqrt{s_1^2 + s_3^2}$$

D'où le *déterminant des conditions aux limites*

$$\Delta_L = \begin{vmatrix} \tau_{12}^{(1)} & \tau_{12}^{(2)} & \tau_{12}^{(3)} & \tau_{12}^{(4)} \\ \tau_{22}^{(1)} & \tau_{22}^{(2)} & \tau_{22}^{(3)} & \tau_{22}^{(4)} \\ \tau_{32}^{(1)} & \tau_{32}^{(2)} & \tau_{32}^{(3)} & \tau_{32}^{(4)} \\ D_2^{(1)} + i s \varepsilon_0 \phi^{(1)} & D_2^{(2)} + i s \varepsilon_0 \phi^{(2)} & D_2^{(3)} + i s \varepsilon_0 \phi^{(3)} & D_2^{(4)} + i s \varepsilon_0 \phi^{(4)} \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

$\Delta_L = 0$ est la condition d'existence de l'onde de surface.

Surface métallisée court-circuitée En plus des tensions mécaniques nulles (5.2), *le potentiel est nul* en $x_2 = 0$:

$$\phi = \sum_{r=1}^4 a_r \phi^{(r)} = 0 \quad (5.5)$$

Le déterminant des conditions aux limites devient donc

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} \tau_{12}^{(1)} & \tau_{12}^{(2)} & \tau_{12}^{(3)} & \tau_{12}^{(4)} \\ \tau_{22}^{(1)} & \tau_{22}^{(2)} & \tau_{22}^{(3)} & \tau_{22}^{(4)} \\ \tau_{32}^{(1)} & \tau_{32}^{(2)} & \tau_{32}^{(3)} & \tau_{32}^{(4)} \\ \phi^{(1)} & \phi^{(2)} & \phi^{(3)} & \phi^{(4)} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.6)$$

Couplage Les déterminants des conditions aux limites Δ_L et Δ_M donnent chacun une courbe lenteur pour l'onde de surface. *La lenteur sur surface métallisée est toujours plus grande que sur*

surface libre (la vitesse plus petite). Le couplage électromécanique est toujours donné approximativement par

$$K^2 = 2 \frac{\Delta v}{v} = 2 \frac{\Delta s}{s}$$

5.1.7 Exemple : niobate de lithium (coupe Y, propagation Z)

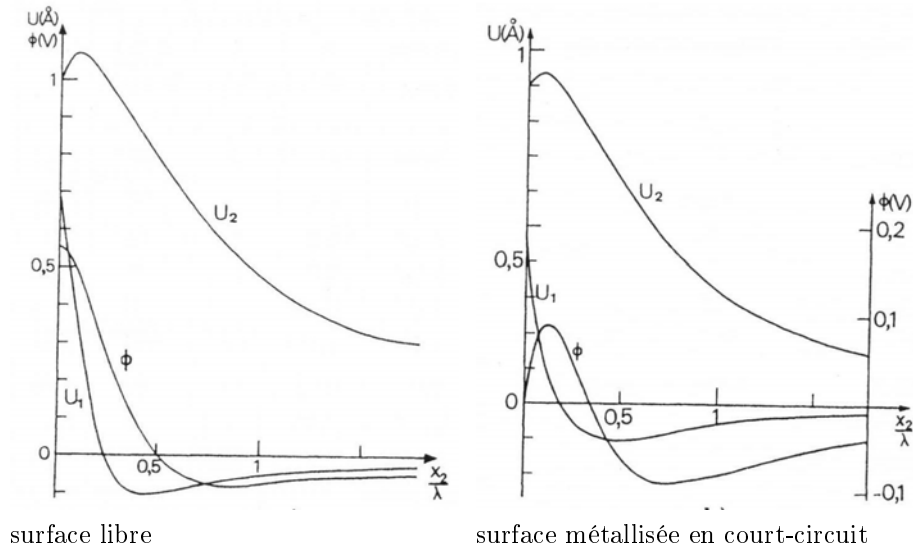


Figure 5.6. Polarisation de l'onde de Rayleigh du niobate de lithium YZ en fonction des conditions aux limites en surface.

5.1.8 Courbes de lenteur pour le niobate de lithium coupe Y

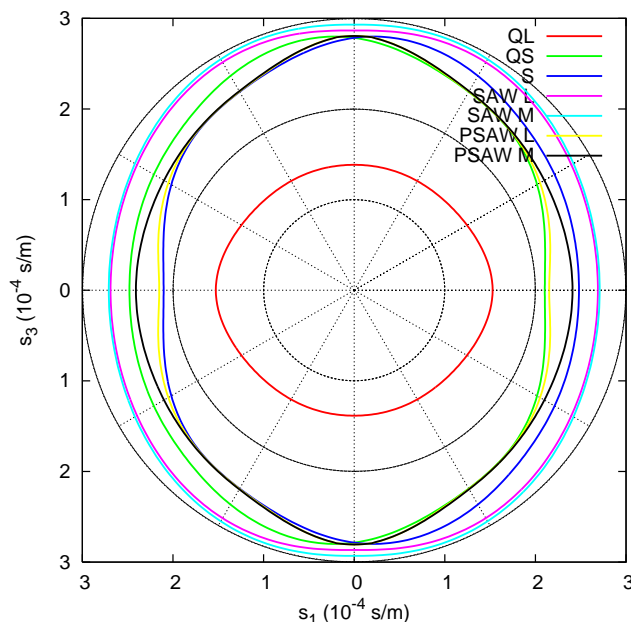


Figure 5.7. Courbes de lenteurs des ondes de volume et de surface pour le niobate de lithium de coupe Y.

5.1.9 Fonction de Green et permittivité effective de surface

Fonction de Green spectrale Quelles que soient les conditions aux limites en surface, le nombre de lignes de la relation (1) est le double du nombre de modes partiels ; on élimine les

amplitudes pour obtenir la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{22} \\ \tau_{32} \\ \frac{D_2}{-i\omega} \end{pmatrix} \text{ avec la matrice de Green } G = \begin{pmatrix} \bar{u}_i^{(r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{i2}^{(r)} \end{pmatrix}^{-1} \quad (5.7)$$

Cette relation permet de considérer une forme d'excitation quelconque dans les simulations numériques (cf. cours suivant).

Permittivité effective de surface Quand la surface est libre mécaniquement, les contraintes normales à la surface sont nulles et $\phi = G_{44} \frac{D_2}{-i\omega}$. On définit

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{D_2}{E_{\text{longitudinal}}} = \frac{D_2}{-\omega s \phi} = \frac{i}{s G_{44}} \quad (5.8)$$

Les pôles de cette fonction donnent les ondes pour une surface en court-circuit, les ondes sur une surface libre sont données par $\varepsilon_{\text{eff}} = -\varepsilon_0$.

5.1.10 Pseudo-ondes de surface (PSAW)

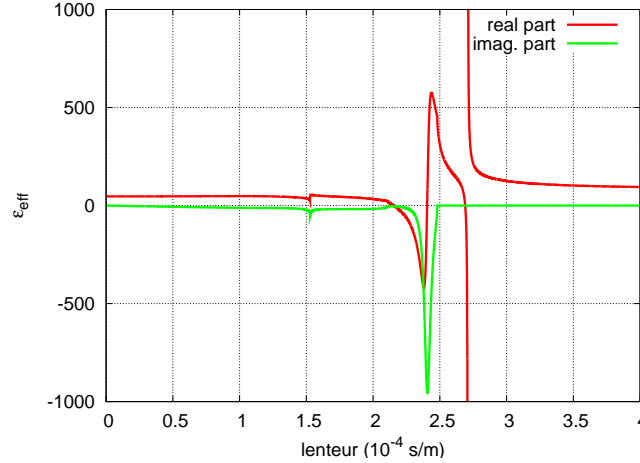


Figure 5.8. Permittivité effective de surface pour le niobate de lithium de coupe Y, prop. X.

Quand le déterminant des conditions aux limites est presque nul, on obtient une onde partiellement guidée par la surface (onde à pertes par rayonnement dans le substrat). En pratique, ces ondes sont très importantes car on peut obtenir des pertes limitées avec des couplages électromécaniques très importants.

5.1.11 Exemples d'ondes de surface utilisées en pratique

Cristal	Coupe	Direction	Type	v_M (m/s)	α (dB/ λ)	K^2 (%)	$\frac{\varepsilon_\infty}{\varepsilon_0}$
LiNbO ₃	Y	Z	R	3390	0	4.5	46
LiNbO ₃	Y+128	X	SAW	3870	0	5	56
LiNbO ₃	Y+128	X	BG	4030	0	$2.5 \cdot 10^{-4}$	56
LiNbO ₃	Y+41	X	PSAW	4380	$2 \cdot 10^{-2}$	16	63
LiTaO ₃	Y	Z	R	3210	0	0.9	48
LiTaO ₃	Y+36	X	PSAW	4110	$3 \cdot 10^{-4}$	5.5	50
Quartz	Y+42	X	SAW	3158	0	0.11	6
ZnO	X	Y	BG	2823	0	0.5	10

Tableau 5.1. Caractéristiques des ondes de surface sur quelques coupes cristallines.

Type d'onde	Polarisation
Rayleigh (R)	sagittale
Rayleigh généralisée (SAW)	principalement sagittale
Bleustein-Gulyaev (BG)	une seule composante purement transverse
Pseudo SAW (PSAW)	onde à pertes par rayonnement

Tableau 5.2. Classification des ondes de surface.

5.2 Ondes d'interface

Une onde d'interface est un mode guidé par l'interface entre 2 matériaux. Elle est guidée sans pertes si son amplitude décroît exponentiellement des deux côtés de l'interface. L'intérêt des ondes d'interface est pour l'heure plus théorique que pratique, mais elles permettent en principe de réaliser des composants dont l'interface active est protégée (encapsulée).

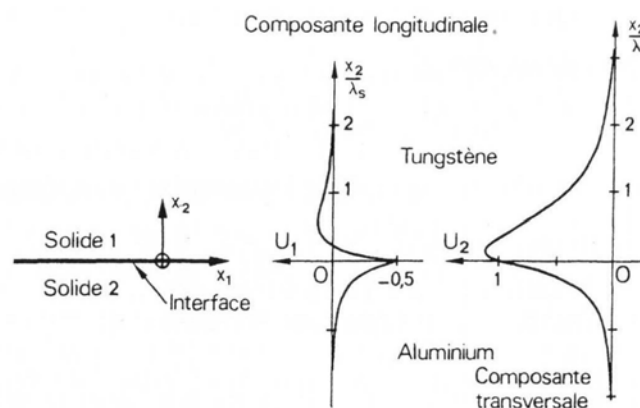


Figure 5.9. Onde d'interface guidée à l'interface plane entre aluminium et tungstène.

On étend les notions introduites pour les ondes de surface : déterminants des conditions aux limites, fonction de Green, permittivité effective d'interface, etc.

5.3 Modes de plaque

Pour une plaque, il faut considérer les conditions aux limites sur les deux surfaces simultanément.

Il existe des ondes de volume, des ondes de surface si l'épaisseur de la plaque est très grande devant la longueur d'onde, plus des modes de plaque proprement dits.

Ondes de Lamb : modes de plaque pour un matériau isotrope.

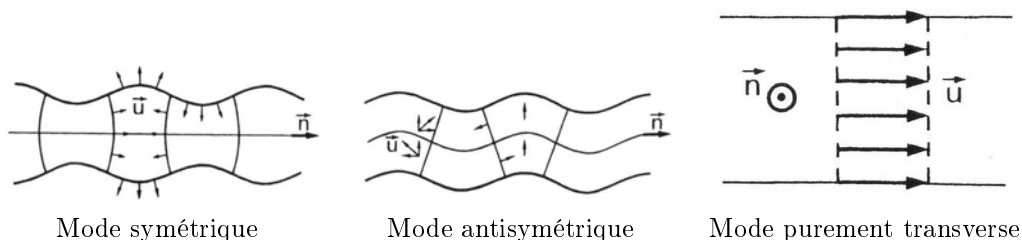


Figure 5.10. Différents modes de plaque.

5.4 Modes d'un multicouche

Pour un empilement de couches (minces ou épaisses) il existe des modes de volume, de surface, d'interface, de plaque et des modes de l'empilement proprement dit. Le calcul utilise toujours la

notion de modes partiels, des conditions de continuité entre les couches et la prise en compte des conditions aux limites.

Dans le cas d'une couche isotrope sur un substrat semi-infini isotrope, les ondes purement transversales évanescentes dans le substrat sont appelées *ondes de Love*.

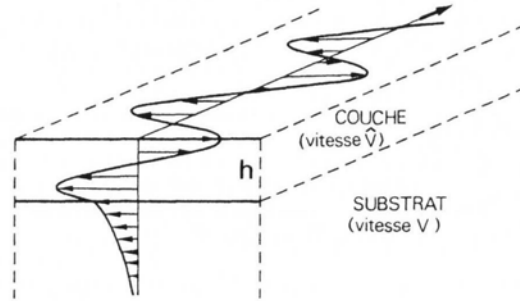


Figure 5.11. Onde de Love.

5.5 Modes d'une fibre (cylindre) par éléments finis

Une fibre est définie par sa section et est supposée infiniment longue. On maille la section de la fibre par des éléments finis triangulaires (à 6 noeuds dans les exemples suivants) et on utilise des polynômes de Lagrange d'ordre 2 pour l'approximation des déplacements.

La polarisation des modes guidés par la fibre est de la forme :

$$u_i(t, x, y, z) = p(x, y) \exp(i(\omega t - kz)) \quad (5.9)$$

où $p(x, y)$ est l'approximation polynomiale à l'intérieur des éléments finis, ω est la fréquence angulaire et k est le vecteur d'onde longitudinal.

L'écriture du problème variationnel sur les éléments finis conduit à l'équation aux valeurs propres

$$(K(k) - \omega^2 M) \mathbf{u} = 0 \quad (5.10)$$

avec $K(k)$ la matrice de raideur, M la matrice de masse et \mathbf{u} le vecteur des déplacements nodaux. Les modes guidés sont les vecteurs propres pour les valeurs propres ω^2 . Le caractère défini positif des matrices de masse et de raideur garantit que $\omega^2 > 0$.

5.5.1 Exemple : fibre circulaire pleine (aluminium, diam. 1 μm)

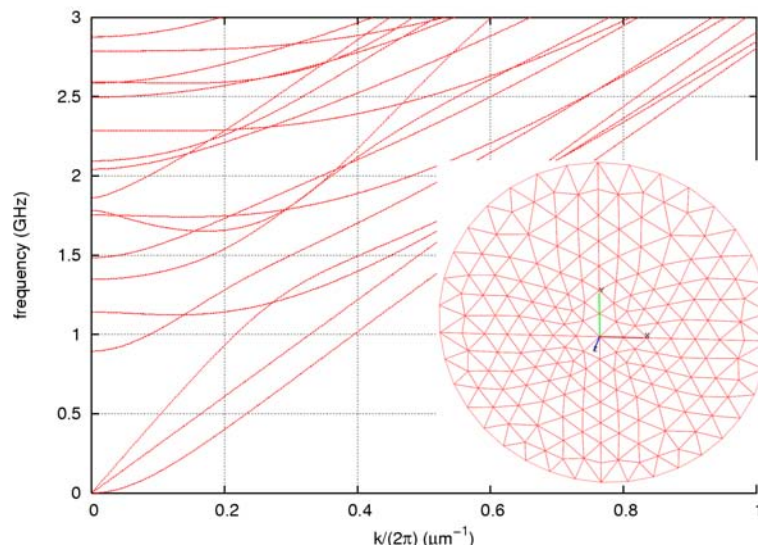


Figure 5.12. Diagramme de bande d'une fibre pleine.

5.5.2 Exemple : fibre circulaire trouée (aluminium, diam. 1 μm)

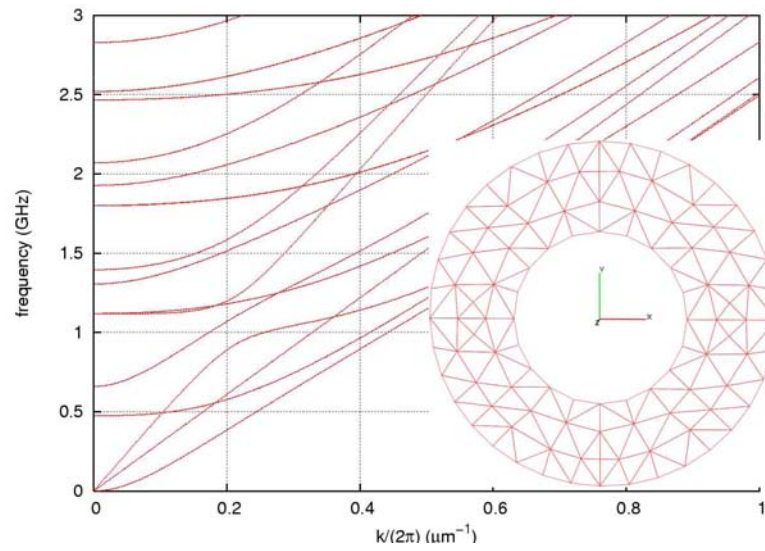


Figure 5.13. Diagramme de bande d'une fibre creuse.

Chapitre 6

Exemples de dispositifs à ondes élastiques

6.1 Transducteurs d'ondes planes acoustiques

6.1.1 Principes

Un transducteur d'ondes planes a pour but de convertir un signal électrique en une onde acoustique, ou l'inverse. Pour cela on peut employer l'effet piézoélectrique ou une actuation de type électrostatique d'une membrane par exemple.

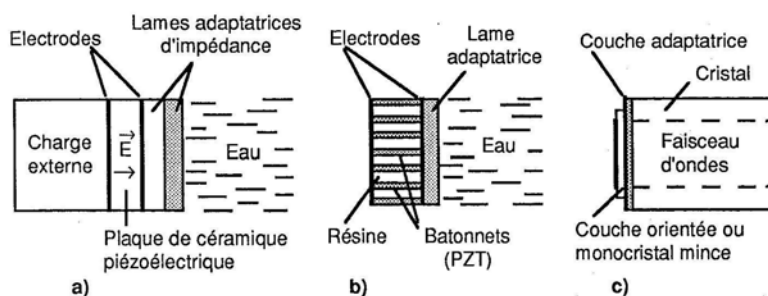


Figure 6.1. (a) Transducteur mono-élément pour engendrer des ondes acoustiques dans l'eau ou le corps humain. (b) Idem mais utilisant un piézocomposite. (c) Transducteur d'ondes acoustiques pour le traitement du signal ou l'acousto-optique par exemple.

6.1.2 Exemple d'un transducteur d'ondes planes longitudinales

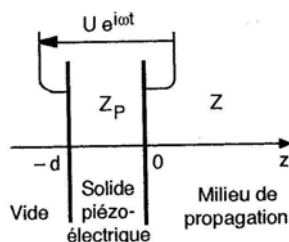


Figure 6.2. Schéma simplifié d'un transducteur d'ondes planes.

Considérons une lame piézoélectrique, par exemple de classe de symétrie hexagonale (PZT, ZnO, AlN) ou trigonale (LiNbO₃). Suivant l'axe cristallographique [001] (ou Z) il existe une onde pure longitudinale couplée piézoélectriquement.

On suppose que les deux faces sont métallisées (l'épaisseur de la métallisation est négligeable pour simplifier).

Dans ces conditions, les équations constitutives se réduisent à

$$T = c \frac{\partial u}{\partial z} - e E \text{ avec } T = T_{33}, u = u_3, c = c_{33}, z = x_3, e = e_{33}, E = E_3 \quad (6.1)$$

$$D = \varepsilon E + e \frac{\partial u}{\partial z} \text{ avec } D = D_3, \varepsilon = \varepsilon_{33} \quad (6.2)$$

Les équations dynamiques sont

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial D}{\partial z} = \rho_e \quad (6.4)$$

ρ_e représente la densité de charges sur les électrodes (localisée uniquement aux deux interfaces piézoélectrique / métal). Spatialement, D est constant dans tout l'intérieur du piézoélectrique.

On sait qu'à l'intérieur du piézoélectrique, l'onde longitudinale possède une vitesse $V = \sqrt{\bar{c}/\rho}$ avec $\bar{c} = c + e^2/\varepsilon$. On a formellement la pression acoustique $p = -T$ et l'impédance acoustique $Z_p = \rho V = \bar{c}/V$.

Il est intéressant d'éliminer le champ électrique E de (6.1) en insérant (6.2), soit

$$T = \bar{c} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{eD}{\varepsilon} \quad (6.5)$$

Supposons qu'on applique une différence de potentiel $U \exp(i\omega t)$ et donc qu'il circule un courant $I \exp(i\omega t)$ entre les deux électrodes par l'intermédiaire d'un circuit électrique externe. D est alors donné par $i\omega D = I/S$ où S est la surface des électrodes.

6.1.2.1 Forme de la solution

Dans le milieu piézoélectrique, on a superposition de deux ondes planes harmoniques contrapropagatives et du comportement électrostatique (condensateur plan), de sorte qu'on pose (avec $k = \omega/V$)

$$v = i\omega u = a \exp(-ikz) + b \exp(ikz) \quad (6.6)$$

$$T = -Z_p(a \exp(-ikz) - b \exp(ikz)) - \frac{eD}{\varepsilon} \quad (6.7)$$

Dans le milieu de transmission, on a aussi

$$v = i\omega u = a_t \exp(-ik_t z) \quad (6.8)$$

$$T = -Z a_t \exp(-ik_t z) \quad (6.9)$$

En intégrant (2) selon z de $-d$ à 0 on obtient

$$Dd = \varepsilon U + e(u(0) - u(-d)) \quad (6.10)$$

Donc en résumé :

- le déplacement u et la vitesse v sont purement ondulatoires ;
- la contrainte T et le champ électrique E sont la superposition d'une contribution ondulatoire et d'une contribution statique ;
- le déplacement électrique D est purement statique.

6.1.2.2 Réponse du transducteur

Les conditions aux limites mécaniques sont :

- continuité de u (ou v) et T entre le milieu piézoélectrique et le milieu de rayonnement ;
- nullité de T sur la surface libre (ou nullité des déplacements sur la surface bloquée si on utilisait un backing ou charge mécanique externe).

Dans tous les cas, il y a 3 conditions aux limites plus l'équation électrique (6.10) pour 5 inconnues (a, b, a_t, I et U). On peut donc par exemple obtenir a, b, a_t et I en fonction de U sous une forme matricielle.

On donne (sans démonstration) la forme de la solution pour la vitesse de l'interface piézoélectrique / milieu de rayonnement pour une surface libre en $z = -d$:

$$v(z=0) = \frac{e}{d \sqrt{Z Z_p}} H(f) U \quad (6.11)$$

où $H(f)$ est la réponse fréquentielle du transducteur, donnée par

$$H(f) = \left(m \left(\frac{\pi f}{2 f_p} \right) \right)^{-1} \text{ avec } f_p = \frac{V}{2d} \text{ soit } \frac{f}{f_p} = \frac{2d}{\lambda} \quad (6.12)$$

et

$$m(\theta) = \sqrt{\frac{Z}{Z_p}} \left(\frac{K^2}{2\theta} - \cotg(2\theta) \right) \cotg(\theta) + i \sqrt{\frac{Z_p}{Z}} \left(\frac{K^2}{\theta} - \cotg(2\theta) \right) \quad (6.13)$$

avec $\theta = \frac{\pi f}{2 f_p}$.

On obtient la *puissance acoustique rayonnée* sous la forme :

$$\langle P \rangle = K^2 C_0 f_p |H(f)|^2 |U|^2$$

avec la capacité statique $C_0 = \varepsilon S/d$ et le coefficient de couplage électromécanique $K^2 = \frac{e^2}{\varepsilon \bar{c}}$.

6.1.2.3 Illustration numérique

Soit un transducteur en niobate de lithium (coupe Y+36) fonctionnant à 100 MHz pour lequel on donne :

$K^2 = 0.24$, $\varepsilon = 3.4 \cdot 10^{-10}$ F/m, $V = 7340$ m/s, $S = 10$ mm² et $|H(f)|^2 \simeq 2$ autour de f_p (on suppose l'adaptation d'impédance $Z \simeq Z_p$).

On trouve $d = 37$ μm, $C_0 = 91.9$ pF puis $\langle P \rangle / |U|^2 = 4.4$ mW/V²

Soit une puissance rayonnée de 4.4 mW pour 1 Volt, mais de 440 mW pour 10 Volt.

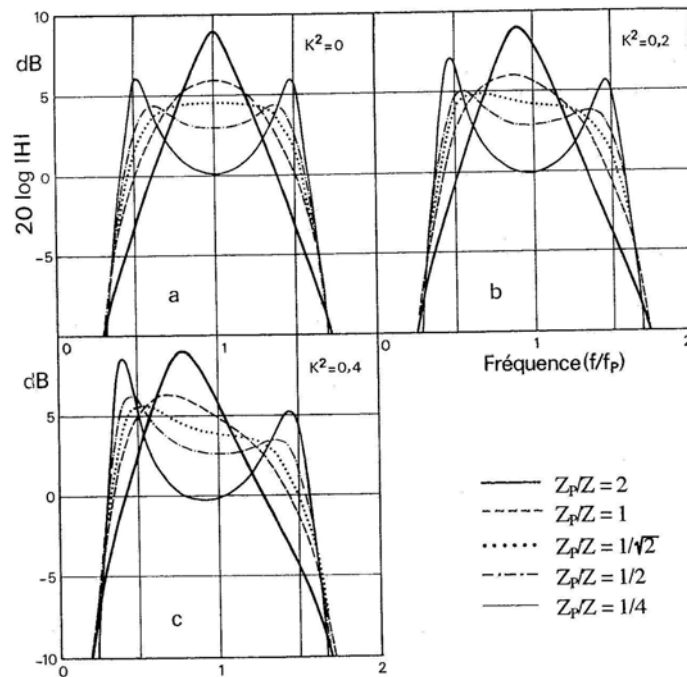


Figure 6.3. Allure de la réponse fréquentielle $H(f)$.

6.1.3 Transducteurs piézocomposites

Il est possible d'ajuster à la fois le couplage électromécanique et l'impédance acoustique (de façon à l'adapter à celle du milieu de rayonnement) par homogénéisation des propriétés de deux matériaux.

Chacun ou un groupe de barreaux peut être également considéré comme un pixel d'émission / réception d'un transducteur 2D.

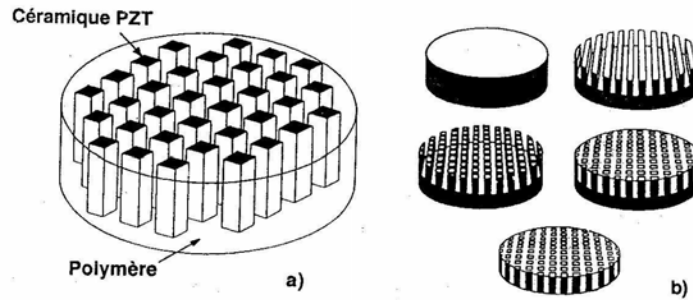


Figure 6.4. (a) Piézo-composite composé de barreaux de céramique PZT (piézoélectrique) noyés dans une matrice polymère. (b) Procédé de fabrication par découpe à la scie d'une plaque de PZT (lames de scies de largeur inférieure à 100 µm).

6.1.4 Transducteurs micro-usinés (MUT)

Connus sous le nom de MUT (*micromachined ultrasonic transducers*). Il s'agit d'un réseau périodique de membranes fabriquées par des microtechniques (lithographie, gravure chimique et ionique, dépôts de couches minces, etc...) en salle blanche. Les membranes ont typiquement une épaisseur de 1 µm pour une largeur de qq 100 µm. Objectif : imagerie médicale 3D @ qq MHz.

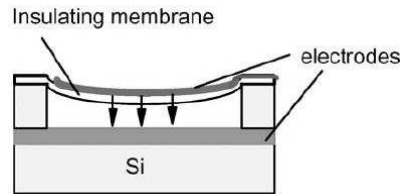


Figure 6.5. Actuation électrostatique des MUT. La capacité est du type $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ avec S la surface et d l'entrefer. La force électrostatique agissant sur la membrane fait varier d avec la tension appliquée.

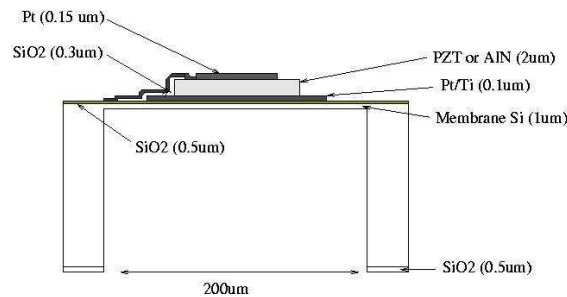


Figure 6.6. Actuation piézoélectrique des MUT. Une membrane très mince (Si) supporte un transducteur en couches minces. Le rayonnement a lieu par l'arrière.

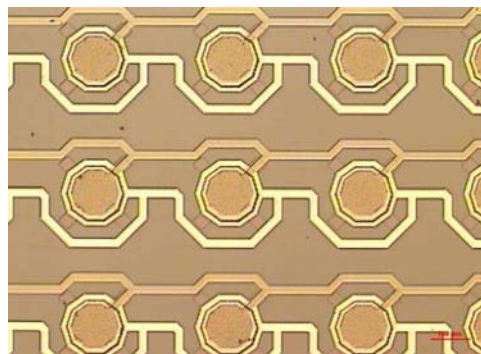


Figure 6.7. Vue d'une matrice de pMUT fabriquée collectivement sur un substrat de Si. Les pistes électriques servent à l'adressage des pixels.

6.1.5 Résonateurs à films minces (FBAR)

FBAR = film bulk acoustic resonator

Principe : exciter une résonance acoustique dans l'épaisseur d'une couche mince piézoélectrique isolée acoustiquement. On utilise en général une onde plane longitudinale. On construit un filtre à la surface d'un substrat en associant plusieurs résonateurs.

Avantage : fréquence de fonctionnement élevée si la couche est mince. En contrepartie, il faut contrôler précisément les épaisseurs des couches.

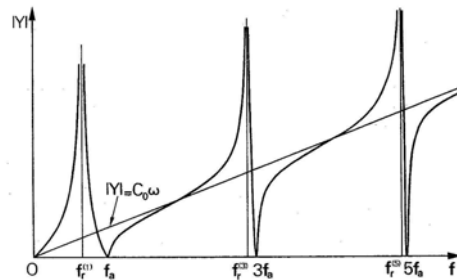


Figure 6.8. Admittance $Y = I/U$ d'un résonateur plan piézoélectrique. f_r : résonance. f_a : antirésonance

Pour isoler le résonateur de son substrat, il existe deux stratégies possibles : soit réaliser une *membrane* (semblable au cas des MUT) soit réaliser un *miroir de Bragg acoustique*.

Le miroir de Bragg est constitué d'une alternance de deux matériaux présentant un *fort contraste d'impédance* (Z_1 / Z_2 le plus grand possible) ce qui permet de réaliser un miroir très efficace (réfléchissant 99.9% de l'énergie acoustique en quelques paires de couches). Les épaisseurs des couches sont égales à $\lambda/4$.

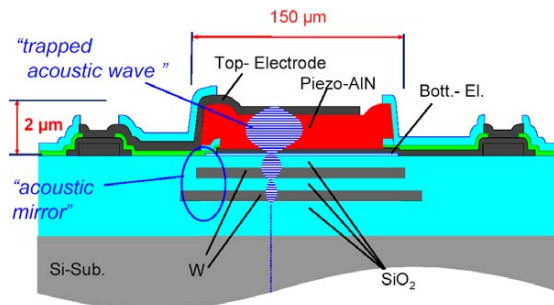


Figure 6.9. Vue en coupe d'un FBAR utilisant un miroir de Bragg acoustique pour confiner l'énergie acoustique.

6.2 Dispositifs à ondes acoustiques de surface

SAW = surface acoustic wave

Principale application : les dispositifs SAW sont utilisés pour réaliser des filtres de bande passifs pour la téléphonie nomade et les réseaux sans fils.

Exemples de normes :

- Europe : GSM (900 MHz) / DCS (1.8 GHz)
- Amérique + Asie : CDMA (880 MHz) / PCS CDMA (1.9 GHz)
- Universel : WCDMA, UMTS (2.1 GHz)
- WLAN (Wireless Local Area Network, réseau local sans fil) (2.45 GHz)

Qualités des filtres SAW :

- Pertes faibles possibles, filtres à flancs très raides ;
- Bas coût / petite taille / fabrication collective.

Principaux défauts : intégration silicium, concurrence du tout-numérique.

6.2.1 Architecture de réception RF

$RF = \text{radio-fréquence}$ (de 1 à 10 GHz typ.), FI ou $IF = \text{fréquence intermédiaire}$ (sous 500 MHz typ.)

Un filtre SAW peut être présent à plusieurs niveaux dans l'architecture :

- Sur l'antenne, pour filtrer la bande utile autour de la fréquence porteuse (section RF) ;
- Après suppression de tout ou partie de la porteuse, pour isoler les canaux de communication dans la bande totale (section IF).

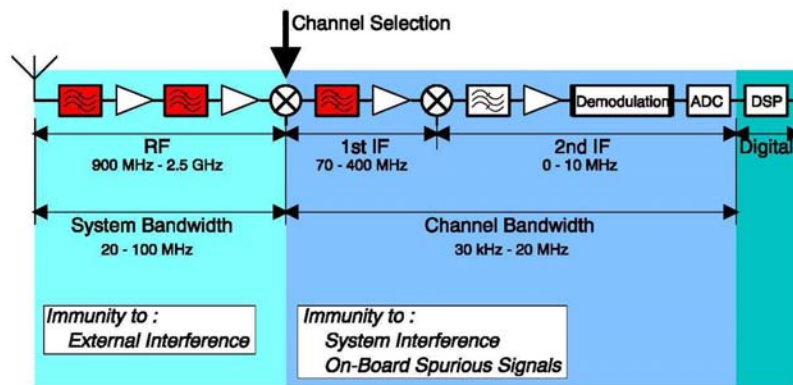


Figure 6.10. Architecture de réception d'un téléphone mobile.

6.2.2 Le principe du peigne interdigité (IDT)

$IDT = \text{interdigital transducer}$

- L'effet piézoélectrique permet de transformer l'énergie électrique en énergie mécanique. Pour exciter une onde de surface, il faut imposer un vecteur d'onde à la surface ; on réalise cette condition en périodisant l'excitation.
- Réciproquement, le peigne interdigité détecte les ondes se propageant à la surface du substrat. L'IDT sert donc à l'émission et à la réception des ondes de surface ; c'est le retard entre ces deux phénomènes qui permet de réaliser un filtrage.

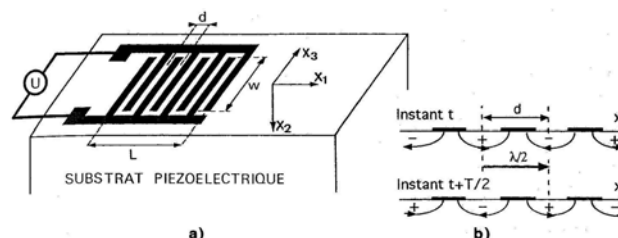


Figure 6.11. Principe du peigne interdigité.

Le peigne interdigité impose une périodicité spatiale de l'excitation : si p est la période (distance d'une électrode à la suivante) et si l'excitation est alternée (séquence de potentiel $+V - V$ à la fréquence $\omega = 2\pi f$), alors les ondes générées ou détectées sont en phase si $\lambda = 2p$.

Comme $\lambda = V_{SAW} / f$, la fréquence centrale (de résonance) est fixée par la période p .
Un transducteur a généralement plusieurs centaines d'électrodes.

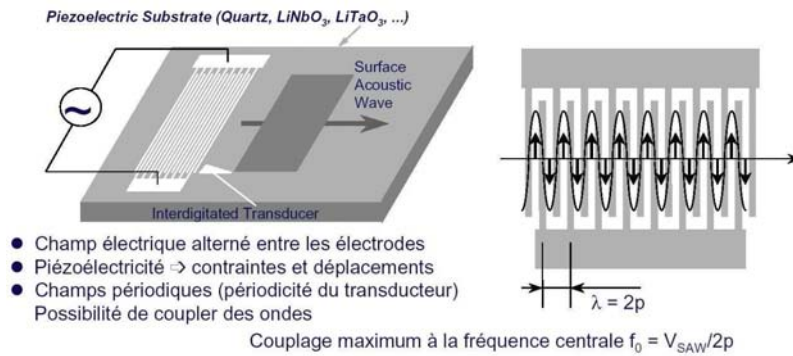


Figure 6.12. Illustration de l'importance de la périodicité d'un transducteur à peigne interdigité.

6.2.3 Notion de retard (vitesse et temps de groupe)

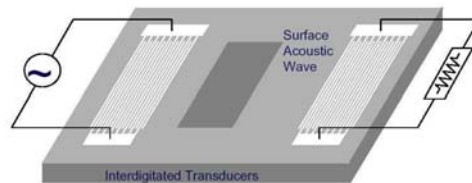


Figure 6.13. Illustration du retard à la propagation d'une onde de surface entre deux transducteurs à peigne interdigité.

Soit L la distance entre les 2 IDT. Le temps (retard) que met l'onde de surface émise par un IDT pour atteindre l'autre IDT est

$$\tau_g = L / v_g$$

où v_g est la vitesse de groupe. Ce type de dispositif est une *ligne à retard* (qui a eu son heure de gloire pour la télévision analogique et reste parfaitement d'actualité pour les capteurs SAW).

6.2.4 Couplage électroacoustique et largeur de bande

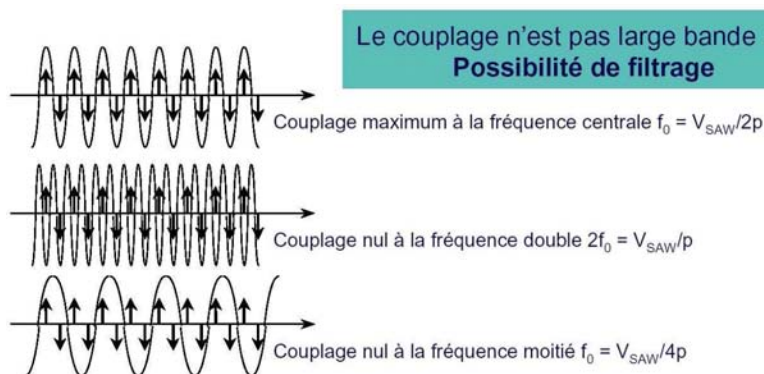


Figure 6.14. Couplage dans un peigne interdigité.

La bande de fréquence dans laquelle la transduction des ondes de surface est en phase pour toutes les électrodes est relativement étroite. Elle est liée d'une part à la structure périodique des électrodes (et à leur nombre) et d'autre part au couplage électroacoustique pour le substrat piézoélectrique.

6.2.5 Structure classique des filtres SAW

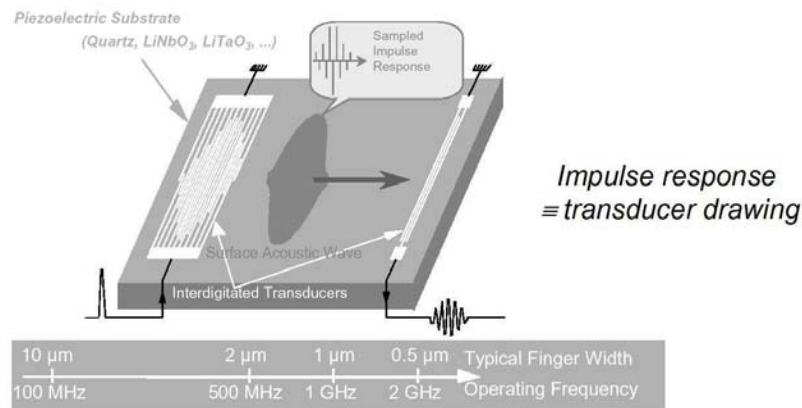


Figure 6.15. Filtre SAW classique : le dessin des électrodes reproduit la réponse impulsionnelle du filtre désiré. Le transducteur de réception comporte très peu de doigts afin de présenter une bande passante large (une réponse impulsionnelle la plus courte possible).

Jusque dans les années 1990, les filtres étaient souvent conçus en dessinant la réponse impulsionnelle (finie) du filtre, c'est-à-dire la transformée de Fourier (en temps) de la forme spectrale désirée.

Une onde de type Rayleigh est en général employée.

Problèmes principaux de cette approche : pertes d'insertion importantes (20 à 30 dB typiquement), taille importante du filtre.

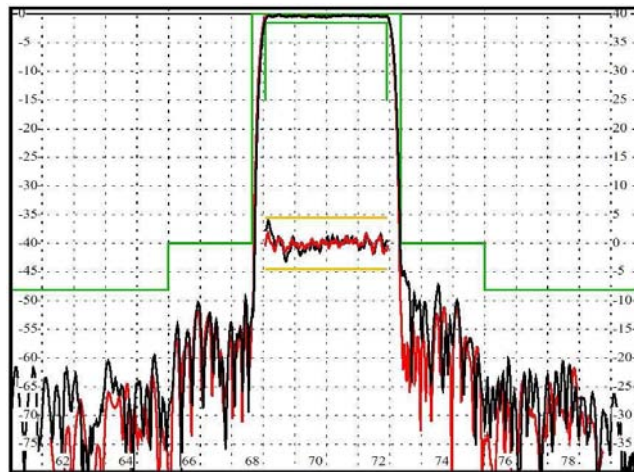


Figure 6.16. Exemple de réponse mesurée d'un filtre classique. Nota : une perte d'insertion de 20 dB a été ôtée de la mesure.

6.2.6 Filtres SAW à réponse impulsionnelle infinie

L'idée est d'employer des miroirs acoustiques afin d'empêcher les ondes de surface émises par un IDT de sortir des résonateurs (cavités) ainsi créés. La réponse impulsionnelle est infinie car l'énergie acoustique est stockée indéfiniment (enfin en principe...).

L'élément de base est le réseau périodique utilisé dans sa bande d'arrêt : si les électrodes sont très nombreuses et séparées de $\lambda/2$, une onde incidente orthogonalement est entièrement réfléchie même la réflexion individuelle sur chaque électrode est relativement faible.

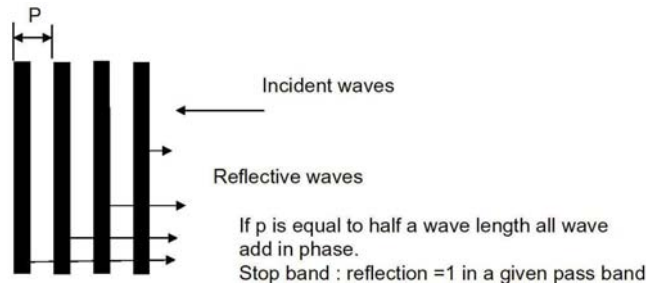


Figure 6.17. Principe du miroir réflecteur de type Bragg.

6.2.7 Structures de filtres et nombre de pôles

Des résonateurs simples sont créés en entourant un ou des transducteurs par des miroirs acoustiques. Les avantages par rapport aux structures classiques de filtres SAW sont la compacité et les pertes par rayonnement sur la surface réduites.

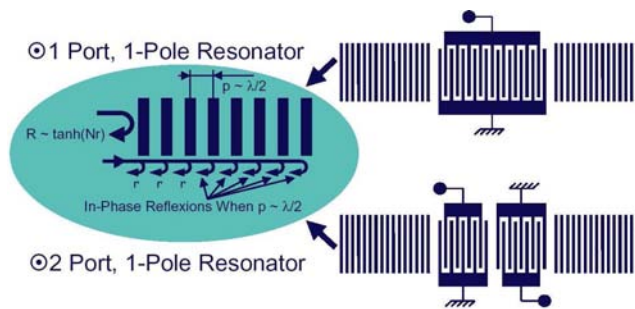


Figure 6.18. Structure de résonateurs compacts à réponse impulsionnelle infinie.

6.2.8 Couplage transverse de résonateurs SAW

En couplant deux résonateurs dont la fréquence de résonance est initialement la même on produit deux résonances dont l'écartement dépend de la force du couplage (qui est en général relativement faible d'où un filtrage à bande étroite).

Un couplage électrique permet réaliser une fonction similaire, mais à partir de résonateurs dont les fréquences de résonances sont différentes.

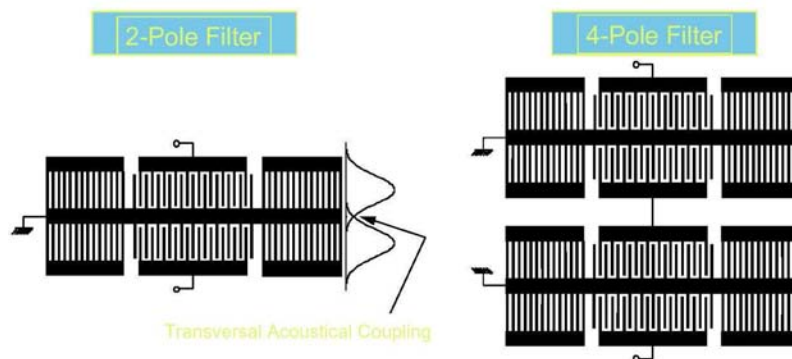
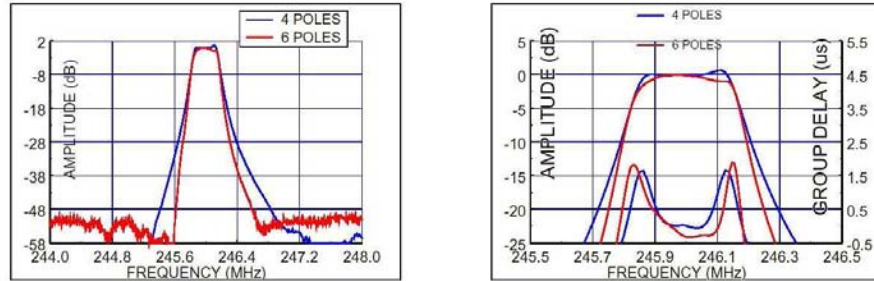


Figure 6.19. Couplage acoustique de résonateurs SAW.

L'augmentation du nombre de pôles dans le filtre permet de réaliser des transitions plus raides (flancs de la bande de filtrage plus abrupts).

Un compromis doit cependant être trouvé avec les pertes d'insertion augmentées du fait qu'on augmente le nombre de résonateurs élémentaires.



Reference loss : 4 poles 4 dB, 6 poles 4.1 dB
4 poles : 3.8 mm X 3.8 mm, 6 poles 7 mm X 5 mm

Figure 6.20. Exemples de filtres SAW à couplage transverse.

6.2.9 Structure de filtre SAW en échelle (*ladder*)

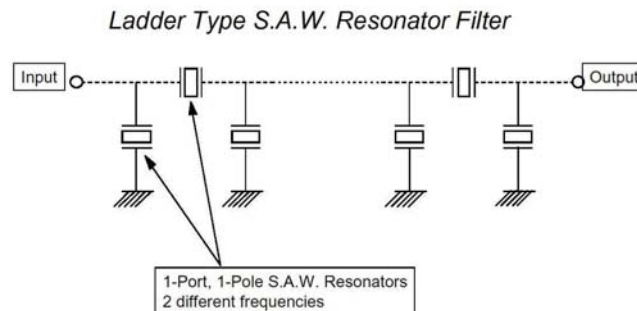


Figure 6.21. Principe de l'architecture de filtre SAW *ladder*. On utilise deux types de résonateurs SAW dont les fréquences de résonance sont \neq . En série ou en parallèle, les admittances sont inversées ($f_r \leftrightarrow f_a$).

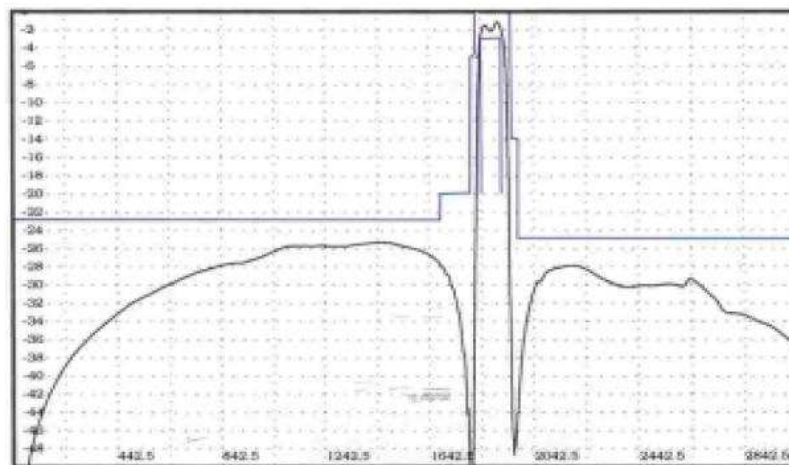


Figure 6.22. Exemple de filtre DCS. $f_0 = 1840.5$ MHz. Pertes insertion 2 dB. Package 3×3 mm².

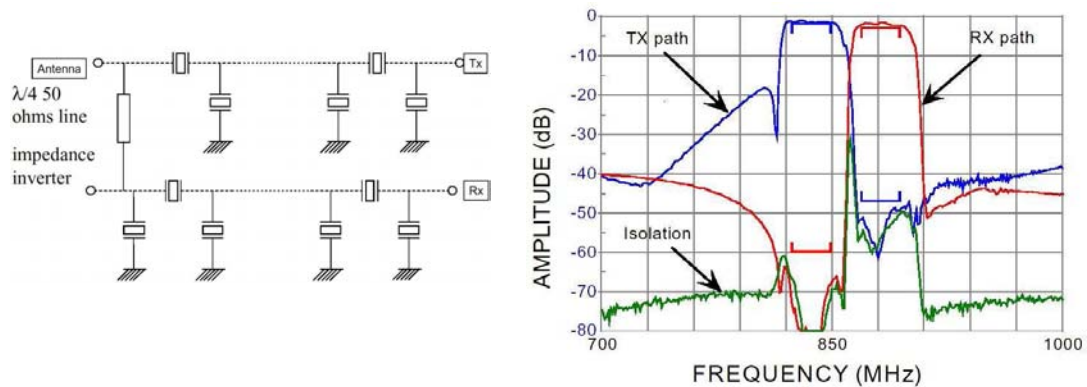


Figure 6.23. Principe du duplexeur SAW. (a) Spécifiquement pour filtrer les signaux directement sur l'antenne, on réalise dans le même dispositif les fonctions transmission (Tx) et réception (Rx). (b) Exemple d'un duplexeur CDMA. Les bandes Tx et Rx doivent être séparées en garantissant leur isolation réciproque. IL Tx : 1.6 dB. IL Rx : 2.4 dB. IL : *insertion loss*.

6.2.10 Simulation numérique des dispositifs SAW

6.2.10.1 Contribution électrostatatique

L'IDT impose la forme du potentiel électrique uniquement sous les électrodes. Sur la surface libre (entre les électrodes) les charges sont nulles. Dans une électrode, les charges sont répulsives : elles s'accumulent aux bords, créant des pointes de champ électrique.

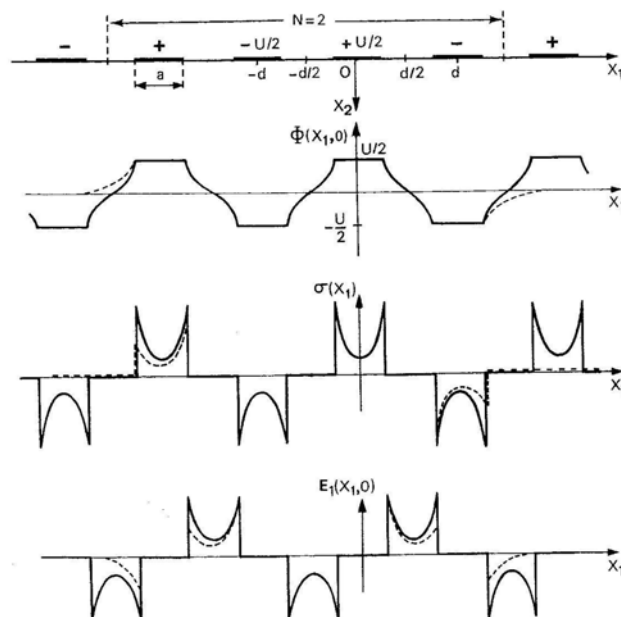


Figure 6.24. Représentation du potentiel électrique, des charges électriques, ainsi que du champ électrique longitudinal dans un transducteur à peigne interdigité.

6.2.10.2 Propagation des SAW dans un réseau d'électrodes

La propagation est dispersive : à la différence d'une surface libre ou uniformément métallisée, la vitesse des SAW dans un réseau d'électrodes dépend de la fréquence. Il en est de même de l'atténuation et du couplage par exemple.

Effet de mass-loading : de façon générale, la masse des électrodes posées sur la surface conduit à un ralentissement des ondes (il existe cependant des contre-exemples) dû à un stockage d'énergie mécanique par les électrodes.

L'allure de l'admittance $Y(f) = I(f)/U$ pour un réseau d'électrodes renseigne sur la présence, la vitesse, l'atténuation et le couplage des ondes de surface présentes, tout en tenant compte de l'influence mécanique et électrique du réseau d'électrodes.

Admittance harmonique : on considère un réseau périodique infini, excité alternativement à travers deux bus selon $U \exp(i\omega t)$. $Y(f)$ le rapport du courant dans une période sur la tension appliquée.

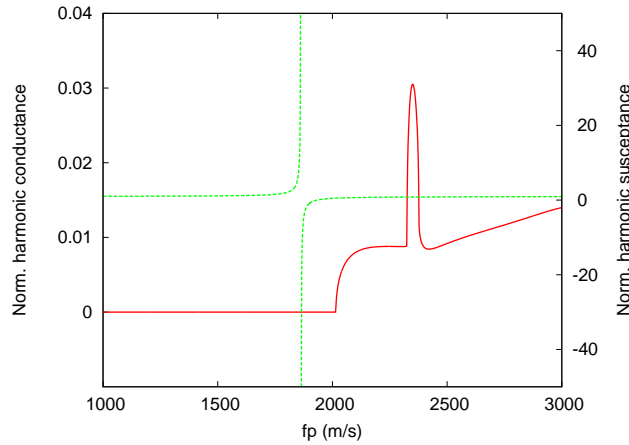


Figure 6.25. Admittance harmonique pour le niobate de lithium de coupe Y+128.

6.2.10.3 Simulation numérique FEM/BEM

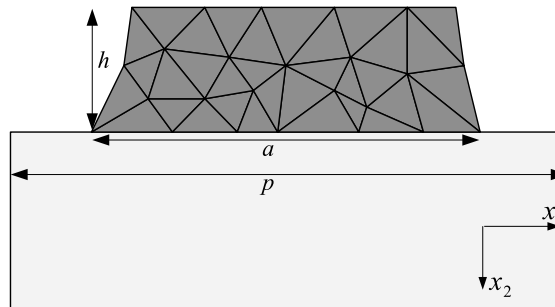


Figure 6.26. Géométrie élémentaire d'une période unique comportant une électrode d'un IDT périodique sur un substrat.

On considère uniquement une période p du réseau. On impose des conditions de périodicité

aux frontières. L'électrode (acoustique seule) est maillée et traitée par la méthode des éléments finis (FEM : *finite element method*). Les déplacements aux noeuds sont obtenus comme solution de l'équation linéaire $(K - \omega^2 M)\mathbf{u} = \mathbf{F}$ où \mathbf{F} représente les forces sur l'interface métal / substrat piézoélectrique.

Pour traiter le substrat, on utilise la fonction de Green de la surface, qui relie les déplacements généralisés aux contraintes généralisées s'exerçant sur la surface :

$$\bar{u}_i = G_{ij} \bar{T}_{j2} \quad (6.14)$$

BEM : *boundary element method*. On raccorde le substrat et l'électrode en développant les contraintes sur la surface sous la forme de polynômes de Tchebychev :

$$\bar{T}_{j2} = \sum_{m=1}^M A_m P_m(\bar{x}) / \sqrt{1 - \bar{x}^2} \quad (6.15)$$

avec $\bar{x} = 2x_1/a$. De même on développe les déplacements généralisés sous la forme

$$\bar{u}_i = \sum_{m=1}^M B_m P_m(\bar{x}) \quad (6.16)$$

En combinant FEM et BEM on obtient les coefficients inconnus A_m et B_m .

6.2.10.4 Méthodes matricielles mixtes électrique / acoustique

On représente une période d'un transducteur par ses ports acoustiques et électriques. Pour la partie acoustique, on fait l'hypothèse qu'une SAW se propage (dans les deux directions) à l'exclusion de toute autre onde. Nota : cette hypothèse est approximative puisque que par exemple des ondes de volume peuvent aussi être engendrées par l'IDT. Cependant, dans la pratique cette approximation s'avère souvent excellente et suffit à une première analyse d'un dispositif.

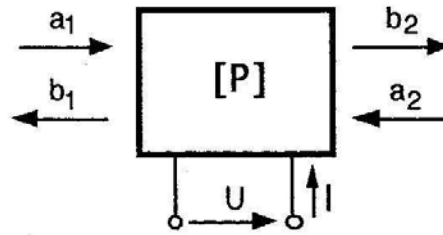


Figure 6.27. Matrice mixte mêlant ports acoustiques et électriques.

La matrice reliant ports acoustiques et électriques est de la forme :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t & \alpha_1 \\ t & r & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & Y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ U \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

r, t : réflexion / transmission ; α, β : transduction ; Y_0 : auto-admittance. A partir des matrices élémentaires décrivant chaque section d'un transducteur, on obtient une simulation numérique d'un transducteur fini.

6.2.11 Fabrication des dispositifs à ondes de surface

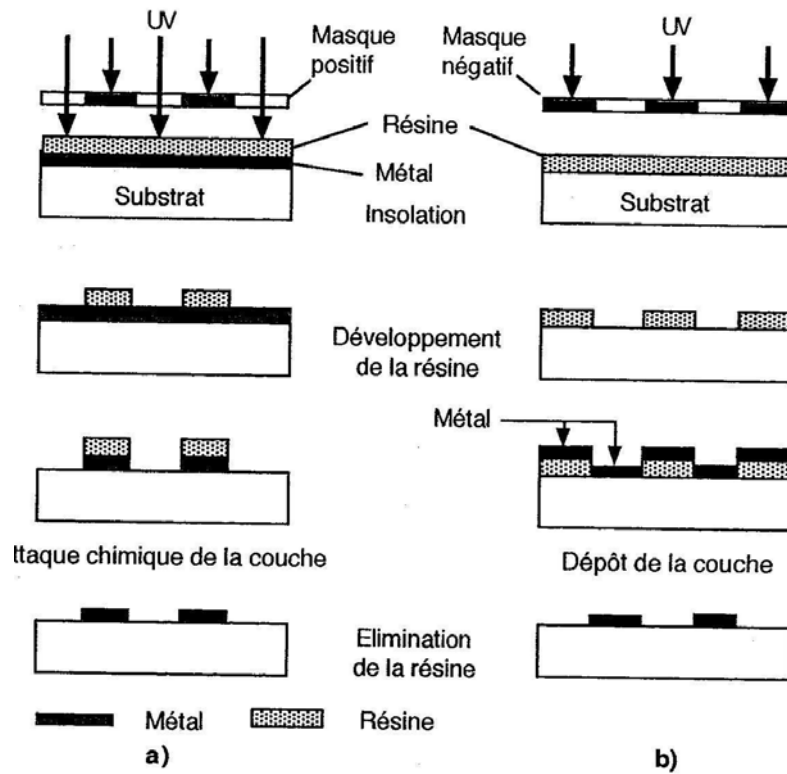


Figure 6.28. Fabrication des dispositifs à ondes acoustiques de surface. **(a) Classique** Elle est mieux adaptée aux gros motifs (donc grandes périodes ou plus faibles fréquences). L'attaque chimique du métal conduit à une sous-gravure. **(b) Lift-off** Adaptée aux petits motifs (plus grandes fréquences). On obtient plutôt des sur-gravures.