C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série II *b*, p. 537-542, 1997
Comportement des matériaux, rhéologie/*Behaviour of materials, rheology*

Homogénéisation d'un circuit électrique

Michel LENCZNER

Équipe de Mathématiques de Besançon, URA 741,
Laboratoire de Calcul Scientifique, Groupe Matériaux Intelligents, Université de Franche-Comté,
16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France.

Résumé. Considérons un circuit électrique à structure périodique incluant des résistances, des sources de tension et des sources de courant. Dans cette Note, on formule le modèle asymptotique de ce système lorsque la taille de la période tend vers 0. L'homogénéisation de circuits électriques est développée en vue de la modélisation de matériaux composites couplant des milieux continus, des capteurs, des actionneurs et de l'électronique distribuée. Pour effectuer cette analyse, on construit une méthode de convergence à deux échelles basée sur la transformation à deux échelles, introduite par Arbogast, Douglas et Hornung (1990). Cette méthode permet, d'une part, de retrouver les résultats de la méthode à deux échelles usuelle introduite par Allaire et conduit, d'autre part, à de nouveaux résultats. En particulier, elle s'applique à des suites de fonctions définies sur une variété périodique de dimension quelconque. L'homogénéisation du circuit électrique est basée sur cette propriété.

Homogenization of an electric circuit

Abstract. *We derive the homogenized model of a periodic electric circuit including resistive devices, tension sources and current sources. The model derivation is based on a two-scale convergence which is based on the two-scale transform introduced by Arbogast, Douglas and Hornung (1990). The present two-scale convergence leads to the same results as the usual two-scale convergence introduced by Allaire. However, its statement is more general; in particular, it allows us to define easily the strong two-scale convergence, and it may be applied to functions defined on some periodical manifolds. Since electric circuits are considered as one-dimensional manifolds, the last point leads to the desired model.*

Introduction

On considère un circuit électrique composé de résistances, de sources de tension et de sources de courant. Ce circuit est supposé être périodique, et l'on désire connaître le modèle limite de ce circuit lorsque la taille de la période tend vers 0. Pour effectuer ce passage à la limite, on formule d'abord les

Note présentée par Evariste SANCHEZ-PALENCIA.

équations de circuit électrique sous forme variationnelle. Cette formulation variationnelle est posée sur le domaine occupé par le circuit électrique, c'est-à-dire une variété monodimensionelle plongée dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour effectuer l'homogénéisation de ce type de problème, nous proposons une méthode de convergence à deux échelles, basée sur la transformation à deux échelles introduite par Arbogast *et al.* (1990).

L'intérêt de cette méthode de convergence à deux échelles est le suivant. Concernant la convergence de suites définies sur un ouvert, cette méthode de convergence à deux échelles conduit aux mêmes résultats que la méthode usuelle de convergence à deux échelles introduite par Allaire (1992) et basée sur un principe introduit par Nguentseng (1989). En plus, elle permet de définir, de façon naturelle, n'importe quel type de convergence à deux échelles, en particulier, des convergences à deux échelles, fortes ou faibles, de suites de fonctions. Par ailleurs, elle s'étend naturellement au cas de la convergence à deux échelles de suites de fonctions définies sur des suites de variétés périodiques. L'application aux circuits électroniques présentée dans cette Note en est un exemple marquant. Enfin, avec cette méthode, les limites de gradient sont établies par des calculs explicites, et les propriétés de périodicité de celles-ci apparaissent naturellement. L'exemple traité en est une illustration, car la condition de périodicité, satisfaite par la fonction u^1 caractérisant la limite à deux échelles d'une dérivée tangentielle n'est pas classique. Cependant, elle apparaît de façon naturelle dans la démonstration. D'autres résultats, non classiques en homogénéisation, ont déjà été obtenus en utilisant cette méthode et feront l'objet de publications ultérieures. Les démonstrations détaillées de ce travail sont exposées dans la référence de l'auteur citée en bibliographie. Enfin, remarquons que l'homogénéisation d'un circuit électrique bidimensionnel, sans sources, a été obtenue dans Vogelius (1991). La méthode employée dans ce travail utilisait un relèvement de la solution dans le plan et nécessitait des hypothèses analogues à celles effectuées classiquement pour la démonstration de la convergence des méthodes d'éléments finis. La méthode proposée dans cette Note ne nécessite pas ces restrictions.

Le plan de ce travail est le suivant. Dans le premier paragraphe, on rappelle la notion de transformation à deux échelles introduite dans Arbogast (1990), ainsi que ses propriétés élémentaires. Ensuite, on y énonce un premier résultat : la convergence à deux échelles du gradient. Ce résultat est à comparer avec celui du même type établi dans Allaire (1992). Au second paragraphe, on formule la transformée à deux échelles ainsi que ses propriétés élémentaires, dans le cas de suites de fonctions définies sur une suite de variétés périodiques monodimensionelles. Le résultat de convergence à deux échelles de dérivées tangentielles est énoncé dans le théorème 2. Dans le paragraphe 3, on formule le problème de circuit électrique résistif avec sources de tension et de courant sous forme de formulation variationnelle. Les équations du problème homogénéisé relatif à un circuit électrique à structure périodique sont énoncées dans le théorème 3.

Pour finir, notons que le cadre variationnel introduit pour les équations de circuit électrique n'est pas standard et qu'il nous paraît intéressant en vue de couplages de systèmes électroniques avec des structures mécaniques.

1. Définition de la convergence à deux échelles

Supposons, pour simplifier la présentation que $\Omega =]0, 1[^n$. Les normales sortantes de Ω et de $Y =]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[^n$ sont notées $\mathbf{n}_\Omega$ et $\mathbf{n}_Y$. Posons $\mathbb{N}^{-1} = \{1/N, N \in \mathbb{N}^*\}$ et pour $\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}$, $I^\varepsilon = \{\mathbf{i} = (i_1, ..., i_n) \in \{0,..,N-1\}^n\}$. Les $\left[\mathbf{x}_\mathbf{i}^\varepsilon = \varepsilon\left(\mathbf{i} + \frac{1}{2}\right)\right]_{\mathbf{i} \in I^\varepsilon}$ sont les centres des cellules $(Y_\mathbf{i}^\varepsilon = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathbf{i}^\varepsilon + \varepsilon\mathbf{y},\ \mathbf{y} \in Y\})_{\mathbf{i} \in I^\varepsilon}$. Considérons l'application définie de $\Omega \times \overline{Y}$ dans

$\widetilde{\Omega}$ par $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}$, telle que, pour tout $\mathbf{i} \in I^\varepsilon$, $\mathbf{z} \in Y^\varepsilon_\mathrm{i}$, $\mathbf{y} \in \overline{Y}$, on ait $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\varepsilon_\mathrm{i} + \varepsilon\mathbf{y}$. Cette définition signifie que $\mathbf{x}$ dépend de l'indice $\mathbf{i}$ mais est indépendant de $\mathbf{z}$ dans Y^ε_i. Cette application est surjective.

Définition (transformation à deux échelles)

L'application réciproque de l'application définie précédemment est appelée la transformation à deux échelles relative à Ω et $(Y^\varepsilon_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in I^\varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$. Elle est notée $\mathscr{F}^\varepsilon$. Remarquons que pour $\mathbf{x} \in Y^\varepsilon_\mathrm{i}$, $\mathscr{F}^\varepsilon(\mathbf{x}) = Y^\varepsilon_\mathrm{i} \times \{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\varepsilon_\mathrm{i})/\varepsilon\}$.

Définition (transformée à deux échelles d'une fonction)

Soit une suite $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in L^1(\Omega)$, la transformée à deux échelles de $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est la suite de fonctions $[\hat{v}^\varepsilon \in L^1(\Omega \times Y)]_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ définie par $\hat{v}^\varepsilon(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = v(\mathbf{x})$ pour $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \in \Omega \times Y$ où $\mathbf{x} = \mathscr{F}^{\varepsilon-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. De façon équivalente, pour tout $\mathbf{i} \in I^\varepsilon$, $\mathbf{z} \in Y^\varepsilon_i$ et $\mathbf{y} \in \overline{Y}$, $\hat{v}^\varepsilon(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = v(\mathbf{x}^\varepsilon_\mathrm{i} + \varepsilon\mathbf{y})$.

Définition (convergence à deux échelles d'une fonction)

Si $(v^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ est une suite de fonctions définie sur Ω telle que $(\hat{v}^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ converge dans $L^p(\Omega \times Y)$ vers une limite $v \in L^p(\Omega \times Y)$, alors on dit que la suite $(v^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ converge à deux échelles dans L^p vers v. Cette convergence est dite forte si $(\hat{v}^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ converge fortement et faible si $(\hat{v}^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ converge faiblement.

LEMME

(i) Pour tout $p \in]0, \infty]$, si $v \in L^p(\Omega)$ alors $\hat{v}^\varepsilon \in L^p(\Omega \times Y)$ et $\| v \|_{L^p(\Omega)} = \| \hat{v}^\varepsilon \|_{L^p(\Omega \times Y)}$;

(ii) pour $p \in]1, \infty[$, si $(v^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ est une suite bornée de $L^p(\Omega)$, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge à deux échelles dans L^p faible vers une limite $v \in L^p(\Omega \times Y)$.

Les notations et résultats qui précèdent ont été formulés dans Lenczner (soumis pour publication). A l'aide de la définition précédente de la convergence à deux échelles, on trouve un théorème de convergence à deux échelles du gradient comparable à celui de Allaire (1992).

THÉORÈME 1

Si une suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$ alors on peut en extraire une sous-suite $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ telle *que :*

(i) $(\hat{u}^\varepsilon)_\varepsilon$ est convergente à deux échelles dans L^2 *faible vers une limite $u^0 \in H^1(\Omega)$*;

(ii) La suite $(\nabla u^\varepsilon)_\varepsilon$ est convergente à deux échelles dans L^2 faible vers une limite $\nabla_\mathbf{z} u^0(\mathbf{z}) + \nabla_\mathbf{y} u^1(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ où $u^1 \in L^2[\Omega ; H^1_\#(Y)]$.

Le point délicat de la preuve de (ii) est le suivant. Il s'agit de montrer que pour tout $\mathbf{v} \in (L^2[\Omega ; H_{\mathrm{div}}(Y)] \cap H_{\mathrm{div}}[\Omega ; L^2(Y)])^n$ nulle sur $\partial\Omega \times Y$, telle que $\mathrm{div}_\mathbf{y}\, \mathbf{v} = 0$ dans $\Omega \times Y$ et telle que $\mathbf{v} \,.\, \mathbf{n}_Y$ est antipériodique sur $\Omega \times \partial Y$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \times Y} \widehat{\nabla u^\varepsilon}(\mathbf{z}, \mathbf{y}).\mathbf{v}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{z} = \int_{\Omega \times Y} \nabla_\mathbf{z} u^0(\mathbf{z}).\mathbf{v}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{z}$$

Cela est obtenu par un calcul explicite.

Dans notre travail cité en référence, on applique ce résultat à l'obtention de la formulation variationnelle à deux échelles relative à un problème d'homogénéisation ; on y retrouve la formulation à deux échelle déjà obtenue dans Allaire (1992).

2. Convergence à deux échelles sur une variété périodique

Considérons $S \subset Y$ une variété Y-périodique de dimension un. Considérons la restriction à $\Omega \times \overline{S}$ de l'inverse de la transformation à deux échelles $\mathscr{F}^{\varepsilon-1}$. Son image est notée Θ^{ε}. Cette application est surjective. Sa fonction réciproque est notée $\mathscr{F}^{\varepsilon}_{\Theta}$; on l'appelle la transformée à deux échelles relative à Θ^{ε}. Pour $\mathbf{i} \in I^{\varepsilon}$, l'intersection de Θ^{ε} avec $Y^{\varepsilon}_{\mathbf{i}}$ est notée $S^{\varepsilon}_{\mathbf{i}}$. Les mesures de Lebesgue sur $\Omega \times S$ et sur Θ^{ε} sont notées $dl(\mathbf{y})d\mathbf{z}$ et $dl(\mathbf{x})$. On suppose que la frontière de S se trouve sur ∂Y. Elle est composée de points deux à deux opposés $(\mathbf{y}^{p+}, \mathbf{y}^{p-})_{p=1..N}$, tels que $\mathbf{n}_Y(\mathbf{y}^{p+})$ est orientée dans la direction positive de l'axe par lequel elle est portée.

Définition

La transformée à deux échelles d'une suite $[v^{\varepsilon} \in L^1(\Theta^{\varepsilon})]_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ est la suite $(\hat{v}^{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ définie dans $\Omega \times S$ par $\hat{v}^{\varepsilon}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = v(\mathbf{x})$ où $\mathbf{x} \in \Theta^{\varepsilon}$ est tel que $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \in \mathscr{F}^{\varepsilon}_{\Theta}(\mathbf{x})$.

LEMME

Pour $p \in]0, \infty]$ si $v^{\varepsilon} \in L^p(\Theta^{\varepsilon})$ alors $\hat{v}^{\varepsilon} \in L^p(\Omega \times S)$ et $\| v^{\varepsilon} \|^p_{L^p(\Theta^{\varepsilon})} = \varepsilon^{1-n} \| \hat{v}^{\varepsilon} \|^p_{L^p(\Omega \times S)}$.

Définition

Si $(v^{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ est une suite de fonctions définies dans Θ^{ε} telle que *$(\hat{v}^{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ converge dans $L^p(\Omega \times S)$, vers une fonction $v \in L^p(\Omega \times S)$, alors la suite $(v^{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ est dite convergente à deux échelles dans L^p vers v. Cette convergence est dite forte si $\hat{v}^{\varepsilon}$ converge fortement et faible si elle converge faiblement.*

LEMME

Pour $p \in]1,\infty[$, si $(\varepsilon^{(n-1)/p} v^{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ est une suite bornée dans $L^p(\Theta^{\varepsilon})$, alors on peut extraire une sous-suite de $(v^{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ qui converge à deux échelles dans L^p faible vers une fonction $v \in L^p(\Omega \times S)$.

En chaque point $\mathbf{x} \in \Theta^{\varepsilon}$ (respectivement $\mathbf{y} \in S$), la direction tangente à Θ^{ε} (respectivement S) est notée $\boldsymbol{\tau}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ (respectivement $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$). La valeur moyenne de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{y}}$ sur S est notée $\boldsymbol{\tau}^0 = \int_S \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})\ dl(\mathbf{y})$. Les dérivées tangentielles $\nabla\psi.\boldsymbol{\tau}^{\varepsilon}$ et $\nabla_{\mathbf{y}}\psi.\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{y}}$ sont notées $\nabla^{\varepsilon}_{\tau_{\mathbf{x}}}\psi$ et $\nabla_{\tau_{\mathbf{y}}}\psi$.

Définissons les espaces

$$H^1(\Theta^{\varepsilon}) = \{\psi \in L^2(\Theta^{\varepsilon}), \nabla^{\varepsilon}_{\tau_{\mathbf{x}}}\psi \in L^2(\Theta^{\varepsilon})\},$$

$$L^2[\Omega\,; H^1_{\#}(S)] = \{v \in L^2(\Omega \times S),\ \nabla_{\tau_{\mathbf{y}}} v \in L^2(\Omega \times S),\ \sum_{p=1}^{N} [v(\mathbf{z}, \mathbf{y}^{p+}) - v(\mathbf{z}, \mathbf{y}^{p-})] = 0\}$$

$H^1_\tau(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \nabla_{\mathbf{z}} v \,.\, \boldsymbol{\tau}^0 \in L^2(\Omega)\}$, et $H^1_{\tau 0}(\Omega)$ l'espace des fonctions $v \in H^1_\tau(\Omega)$ telles que $v\boldsymbol{\tau}^0 \,.\, \mathbf{n}_\Omega = 0$ sur $\partial\Omega$ (cela signifie que $v(\mathbf{z}) = 0$ si $\boldsymbol{\tau}^0 \,.\, \mathbf{n}_\Omega(\mathbf{z}) \neq 0$ pour $\mathbf{z} \in \partial\Omega$). La norme associée à $H^1(\Theta^\varepsilon)$ est $\|\psi\|^2_{H^1(\Theta^\varepsilon)} = \int_{\Theta^\varepsilon} |\psi|^2 + |\nabla^\varepsilon_{\tau_{\mathbf{x}}} \psi|^2 \, \mathrm{d}l(\mathbf{x})$.

THÉORÈME 2

Soit une suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ *telle que* $(\varepsilon^{n-1} \|u^\varepsilon\|^2_{H^1(\Theta^\varepsilon)})_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ *est bornée, alors il existe une suite extraite* $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ *telle que :*

(i) $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ *converge à deux échelles dans* L^2 *faible vers une limite* $u^0 \in H^1_\tau(\Omega)$;

(ii) $(\nabla_\tau u^\varepsilon)_\varepsilon$ *converge à deux échelles dans* L^2 *faible vers une limite* $\nabla_{\mathbf{z}} u^0 \,.\, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{y}} + \nabla_{\tau_{\mathbf{y}}} u^1$ *où* $u^1 \in L^2[\Omega\,; H^1_\#(S)]$;

(iii) si $u^\varepsilon = 0$ *sur* $\partial\Omega \cap \partial\Theta^\varepsilon$ *alors* $u^0 \in H^1_{\tau 0}(\Omega)$.

3. Homogénéisation d'un circuit électrique périodique

On applique le résultat précédent à l'homogénéisation des équations d'un circuit électrique composé de résistances, de sources de tensions et de courants.

Un circuit électrique est composé de nœuds et de branches notés respectivement V^ε et Θ^ε ; Θ^ε est une variété de dimension un dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses faites plus haut. Le potentiel électrique est imposé sur un sous-ensemble non vide V^ε_0 de V^ε. La variété Θ^ε est divisée en trois parties Θ^ε_0, Θ^ε_1 et Θ^ε_2 occupées respectivement par les sources de tension u^ε_d, les sources de courant i^ε_d et les résistances dont l'admittance est g^ε. Les images de $(\Theta^\varepsilon_k)_{k=0..2}$ par $\mathcal{F}^\varepsilon_\Theta$ sont notées $(\Omega \times S_k)_{k=0..2}$. La longueur d'une branche e^ε est notée $|e^\varepsilon|$. On considère $|e^\varepsilon|$ comme une fonction distribuée sur Θ^ε telle que $|e^\varepsilon|(\mathbf{x}) = |e^\varepsilon|$ pour tout $\mathbf{x} \in e^\varepsilon$. Les ensembles $\mathbb{P}^0(\Theta^\varepsilon)$ ou $[\mathbb{P}^0(\Theta^\varepsilon_k)]_{k=0..2}$ (respectivement $\mathbb{P}^1(\Theta^\varepsilon)$) sont constitués des fonctions constantes sur chaque branche de Θ^ε ou de $(\Theta^\varepsilon_k)_{k=0..2}$ (respectivement affines sur chaque branche de Θ^ε et continues sur Θ^ε). Le courant i^ε, la tension u^ε et l'admittance g^ε sont considérés être des champs de $\mathbb{P}^0(\Theta^\varepsilon)$. Le potentiel électrique est un champ de $\mathbb{P}^1(\Theta^\varepsilon)$. Considérons l'espace des fonctions admissibles :

$$\Psi^\varepsilon_{ad}(u^\varepsilon_d) = \{\psi \in \mathbb{P}^1(\Theta^\varepsilon), \Psi = 0 \quad \text{dans} \quad V^\varepsilon_0 \quad \text{et} \quad -|e^\varepsilon|\nabla^\varepsilon_{\tau_{\mathbf{x}}} \psi = u^\varepsilon_d \quad \text{sur} \quad \Theta^\varepsilon_0\}$$

HYPOTHÈSE (H1)

(i) Chaque composante connexe de $\overline{\Theta^\varepsilon_0 \cup \Theta^\varepsilon_2}$ *contient au moins un élément de* V^ε_0 ;

(ii) si un noeud $s^\varepsilon \in \overline{\Theta^\varepsilon_1}$ *alors* $s^\varepsilon \in \overline{\Theta^\varepsilon_0 \cup \Theta^\varepsilon_2} \cup V^\varepsilon_0$;

(iii) il existe g_0 *tel que* $g^\varepsilon \geq g_0 > 0$;

(iv) Θ^ε_0 *et* V^ε_0 *sont tels que pour tout* $u^\varepsilon_d \in \mathbb{P}^0(\Theta^\varepsilon_0)$, $\Psi^\varepsilon_{ad}(u^\varepsilon_d) \neq \emptyset$.

HYPOTHÈSE (H2)

(i) $V^\varepsilon_0 = \partial\Omega \cap \overline{\Theta^\varepsilon}$ *et pour tout* $\psi \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ *il existe une suite* $[\psi^\varepsilon \in \mathscr{C}^1(\Omega)]_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ *telle que* $\psi^\varepsilon_{|\Theta^\varepsilon} \in \Psi^\varepsilon_{ad}(0)$ *qui converge dans* $H^1(\Omega)$ *fortement vers* ψ ;

(ii) il existe $p \in Z$, *tel que :*

$$\begin{cases} \|\varepsilon^p |e^\varepsilon| g^\varepsilon\|_{L^\infty(\Theta^\varepsilon_2)} + \varepsilon^{n-1} \|\varepsilon^p \, i^\varepsilon_d\|^2_{L^2(\Theta^\varepsilon_1)} + \varepsilon^{n-1} \|\varepsilon^p \, u^\varepsilon_d\|^2_{L^2(\Theta^\varepsilon_0)} \leq C, \\ \varepsilon^p \widehat{g}^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} g \text{ dans } L^\infty(\Omega \times S_2), \varepsilon^p \widehat{i_d}^\varepsilon \rightharpoonup i_d \text{ dans } L^2(\Omega \times S_1), \varepsilon^p \widehat{u}^\varepsilon_d \rightharpoonup u_d \text{ dans } L^2(\Omega \times S_0) \end{cases}$$

(iii) pour tout $u_d^\varepsilon \in \mathbb{P}^0(\Theta_0^\varepsilon)$ *vérifiant (H1)*, il existe une fonction $\bar{\varphi}^\varepsilon \in \Psi_{ad}^\varepsilon(0)$ *telle que* $\|\nabla_{\tau_x}^\varepsilon \bar{\varphi}^\varepsilon\|_{L^2(\Theta_0^\varepsilon \cup \Theta_2^\varepsilon)} \leqslant C \|u_d^\varepsilon\|_{L^2(\Theta_0^\varepsilon)}$ *où C est une constante indépendante de* ε ;

(iv) il existe une constante positive C indépendante de ε *telle que* $\|\psi\|^2_{H^1(\Theta^\varepsilon)} \leqslant C \|\psi\|^2_{\Theta_0^\varepsilon \cup \Theta_2^\varepsilon}$ *pour tout* $\psi \in H^1(\Theta^\varepsilon)$.

La formulation variationelle du problème relatif au circuit électrique décrit précédemment est :

$$\int_{\Theta_2^\varepsilon} |e^\varepsilon| g^\varepsilon \nabla_{\tau_x}^\varepsilon \varphi^\varepsilon \nabla_{\tau_x}^\varepsilon \psi \, dl(\mathbf{x}) = \int_{\Theta_1^\varepsilon} i_d^\varepsilon \nabla_{\tau_x}^\varepsilon \psi \, dl(\mathbf{x}) \text{ pour tout } \psi \in \psi_{ad}^\varepsilon(0) \tag{1}$$

Pour $u_d \in L^2(\Omega \times S_0)$, et $\mathbb{P}^1_\#(S) = \mathbb{P}^1(S) \cap H^1_\#(S)$, l'ensemble des fonctions admissibles relatif à la formulation à deux échelles est :

$$\Psi_{ad}^0(u_d) = \{(\psi^0, \psi^1) \in H^1_{\tau 0}(\Omega) \times L^2(\Omega\,;\mathbb{P}^1_\#(S))/\mathbb{R}, \nabla\psi^0\,\boldsymbol{\tau}_\mathbf{y} + \nabla_{\tau_y}\psi^1 = u_d \text{ in } \Omega \times S_0\}$$

THÉORÈME 3

(i) Sous les hypothèses (H1), il existe une solution unique $\varphi^\varepsilon \in \Psi_{ad}^\varepsilon(u_d^\varepsilon)$ *à la formulation variationelle (1) ;*

(ii) sous les hypothèses (H1-2), il existe une suite extraite $(\varphi^\varepsilon)_\varepsilon$ *de la suite* $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}^{-1}}$ *solution de (1) telle que* $(\varphi^\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\nabla_{\tau_x}^\varepsilon \varphi^\varepsilon)_\varepsilon$ *convergent à deux échelles dans* L^2 *faible vers une limite* φ^0 *et* $\nabla\varphi^0 \,.\, \boldsymbol{\tau}_\mathbf{y} + \nabla_{\tau_y}\varphi^1$ *où* $(\varphi^0, \varphi^1) \in \Psi_{ad}^0(u_d)$ *sont les uniques solutions de :*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega \times S_2} g(\nabla\varphi^0 \,.\, \boldsymbol{\tau}_\mathbf{y} + \nabla_{\tau_y}\varphi^1)(\nabla\psi^0 . \boldsymbol{\tau}_\mathbf{y} + \nabla_{\tau_y}\psi^1)\, dl(\mathbf{y})\, d\mathbf{z} = \\ \displaystyle\int_{\Omega \times S_1} i_d(\nabla\psi^0 \,.\, \boldsymbol{\tau}_\mathbf{y} + \nabla_{\tau_y}\psi^1)\, dl(\mathbf{y})\, d\mathbf{z}, \\ \text{pour tout } (\psi^0, \psi^1) \in \Psi_{ad}^0(0) \end{cases}$$

Note remise et acceptée le 17 février 1997.

Références bibliographiques

Allaire G., 1992. Homogenization and two scale-convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, 23, p. 1482-1518.

Arbogast T., Douglas J., Hornung U., 1990. Dérivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory, *SIAM J. Appl. Math.*, 21, p. 823-836.

Lenczner M. Homogenization of electric circuits, soumis pour publication.

Nguentseng G., 1989. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.*, 20, p. 608-623.

Vogelius M., 1991. A homogenization result for planar, polygonal networks, *Math. Modell. Num. Anal.*, 25, p. 483-514.