C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p. 127-130, 1998
Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Équations de Navier–Stokes dans un domaine mince avec viscosité évanescente

Mohamed Rachid LAYDI, Michel LENCZNER

LCS UMR CNRS 6623, université de Franche-Comté, 16, route de Gray, 25030 Besançon, France
E-mail : laydi@math.univ-fcomte.fr

(Reçu le 23 mai 1997, accepté après révision le 27 novembre 1997)

Résumé. Nous étudions le comportement d'un fluide soumis à une traction dans un bassin mince avec viscosité isotrope évanescente. Le modèle obtenu lie les limites des vitesses horizontales et de la pression. Nous donnons la solution exacte dans un cas particulier et une formulation variationnelle dans le cas général.

Navier–Stokes equations in a thin domain with vanishing viscosity

Abstract. *We study the behavior of a fluid submitted to a traction in a thin basin with vanishing isotropic viscosity. The model we get links horizontal velocity and pressure limits. We give the exact solution in a particular case and a variational formulation in the general case.*

1. Présentation du problème

Soit ε un paramètre positif représentant une épaisseur caractéristique du bassin

$$\Omega_\varepsilon := \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x := (x_1, x_2) \in \omega,\ -\varepsilon h(x) < z < 0\right\}$$

où ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ correspendant à la surface d'équation $z = 0$, de frontière lipschitzienne $\partial\omega$, et h une application lipschitzienne strictement positive sur $\bar{\omega}$.

On considère les équations de Navier–Stokes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Conservation de la quantité de mouvement : } -\varepsilon\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \text{Conservation de la masse : div } \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \text{Conditions aux limites sur la surface } \omega : \varepsilon\dfrac{\partial u_1}{\partial z} = \varepsilon\tau_1, \varepsilon\dfrac{\partial u_2}{\partial z} = \varepsilon\tau_2,\ \ u_3 = 0 \\ \text{Conditions aux limites sur le fond } \Gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \setminus \omega :\ \ \mathbf{u} = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

où $\mathbf{u} := (u_i)$ est la vitesse du fluide et p est la pression renormalisée. Les données physiques du problème sont la viscosité cinématique ε et la force tangentielle de la traction sur la surface,

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

$\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{L}^2(\omega)$ (force induite par le vent par exemple). Ce problème modélise le mouvement stationnaire d'un fluide newtonien, incompressible, pesant, à viscosité isotrope. Le rapport de la profondeur h_0 sur son étendue horizontale L est mesuré par :

$$\varepsilon := \frac{h_0}{L} \ll 1$$

2. La renormalisation

Considérons le changement d'échelle :

$$\begin{aligned} x_3 &= \varepsilon^{-1} z \\ v_k(x, x_3) &= \varepsilon^{-1} u_k(x, z), \ k = 1, 2; \ v_3(x, x_3) = \varepsilon^{-2} u_3(x, z) \\ q(x, x_3) &= p(x, z) \end{aligned}$$

Notons Ω le nouveau domaine, $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \omega$, $\mathbf{n}_x := (n_1, n_2)$ et n_3 respectivement les composantes horizontales et la composante verticale de la normale sortante sur le bord $\partial\Omega$, $\mathrm{div}_x \mathbf{v}_x := \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2$ et $\mathrm{H}^1_{0,1}(\Omega) := \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) |\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$. Introduisons les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \left(\mathrm{H}^1_{0,1}(\Omega)\right)^2 \times \mathrm{H}^1_0(\Omega) \\ \mathrm{L}^r_0(\Omega) &:= \left\{ v \in \mathrm{L}^r(\Omega) |\ \int_\Omega v \mathrm{d}\sigma = 0 \right\}, \ r \geq 1 \\ \mathrm{H}(\partial_3, \Omega) &:= \left\{ v \in \mathrm{L}^2(\Omega) |\ \partial_3 v \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\} \end{aligned}$$

Nous montrons, lorsque ε tend vers zéro, le résultat suivant :

THÉORÈME. – *Soit* $\{(\mathbf{v}^\varepsilon, q^\varepsilon)\}_\varepsilon$ *une suite dans* $\mathcal{V} \times \mathrm{L}^2_0(\Omega)$, *de solutions faibles du problème* (1). *Alors, la suite* $\{(\mathbf{v}^\varepsilon_x, q^\varepsilon)\}_\varepsilon$, $\mathbf{v}^\varepsilon_x := (v^\varepsilon_1, v^\varepsilon_2)$, *converge faiblement dans* $(\mathrm{H}(\partial_3, \Omega))^2 \times \mathrm{L}^2_0(\Omega)$ *vers* $(\mathbf{v}_x, q)$, *solution unique du problème :*

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\partial^2_{33} v_1 + \partial_1 q & = 0 & \textit{dans } \Omega \\ -\partial^2_{33} v_2 + \partial_2 q & = 0 & \textit{dans } \Omega \\ \qquad\quad \partial_3 q & = 0 & \textit{dans } \Omega \\ \textit{Conditions aux limites:} & & \\ \mathrm{div}_x \left(\displaystyle\int_0^{h(x)} \mathbf{v}_x \mathrm{d}x_3 \right) & = 0 & \textit{sur } \omega \\ v_1 \cdot n_3 = 0, \ v_2 \cdot n_3 & = 0 & \textit{sur } \Gamma_1 \\ \partial_3 v_1 = \tau_1, \ \partial_3 v_2 & = \tau_2 & \textit{sur } \omega \\ \left(\displaystyle\int_0^{h(x)} \mathbf{v}_x \mathrm{d}x_3 \right) \cdot \mathbf{n}_x & = 0 & \textit{sur } \partial\omega \end{array} \right. \tag{2}$$

Remarque 1. – On se place dans le cas où :
a) la fonction h est à valeur constante : $h(x) = C$;
b) la traction $\tau := (\tau_1, \tau_2)$ vérifie : $\mathrm{div}_x \tau = 0$, $\tau \cdot \mathbf{n}_x = 0$.
Alors, la solution exacte du problème (2) est donnée par :

$$v_k(x, x_3) = \tau_k(x)(x_3 - h(x)), \ k = 1, 2; \quad q(x, x_3) = 0$$

Remarque 2. – La formulation variationnelle du problème (2) est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_x \in \mathcal{H}(\mathrm{div}_x),\ q \in \mathcal{Q}^2,\ \text{vérifiant :} \\ a(\mathbf{v}_x, \mathbf{w}_x) + c_0(q, \mathbf{w}_x) = \tau(\mathbf{w}_x),\ \mathbf{w}_x \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{3}$$

Les formes a et c_0 et les espaces fonctionnels sont définis par :

$$a(\mathbf{v}_x, \mathbf{w}_x) := \int_\Omega \partial_3 \mathbf{v}_x \partial_3 \mathbf{w}_x \mathrm{d}x\ ;\ c_0(q, \mathbf{w}_x) := -\int_\omega q(s) \mathrm{div}_x \left(\int_0^{h(x)} \mathbf{v}_x \mathrm{d}x_3 \right) \mathrm{d}s$$

$$\mathcal{Q}^r := \{ q \in \mathrm{L}_0^r(\Omega) |\ \partial_3 q = 0 \}$$

$$\mathcal{H} := \left\{ \mathbf{w} \in (\mathrm{H}_{0,1}(\partial_3, \Omega))^2 |\ \mathrm{div}_x \left(\int_0^{h(x)} \mathbf{w} \mathrm{d}x_3 \right) \in \mathrm{L}^2(\omega),\ \left(\int_0^{h(x)} \mathbf{w} \mathrm{d}x_3 \right) \cdot \mathbf{n}_x = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}$$

où $\mathrm{H}_{0,1}(\partial_3, \Omega) := \{ v \in \mathrm{H}(\partial_3, \Omega) |\ v n_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \}$; et

$$\mathcal{H}(\mathrm{div}_x) := \left\{ \mathbf{w} \in \mathcal{H} |\ \mathrm{div}_x \left(\int_0^{h(x)} \mathbf{w} \mathrm{d}x_3 \right) = 0 \right\}$$

Remarque 3. – Le cas de viscosité anisotrope conduit à un modèle hydrostatique différent, dont on néglige les termes relatifs à la vitesse verticale u_3 dans la troisième équation de la quantité du mouvement (*voir* [6], [3] et [4]).

Les équations (2) présentent des similitudes avec celles obtenues dans le cas de la lubrification (*voir* [1] et [5]).

3. Démonstration du théorème

On note $\Delta_x = \partial_{11} + \partial_{22}$, $\nabla_x := (\partial_1, \partial_2)$, et on désigne par $\|\cdot\|_r$ indifféremment la norme usuelle dans $\mathrm{L}^r(\Omega)$, $(\mathrm{L}^r(\Omega))^2$, ou dans $(\mathrm{L}^r(\Omega))^3$. Enfin, C désigne diverses constantes positives indépendantes de ε.

La fonction $(\mathbf{v}^\varepsilon, q^\varepsilon) \in \mathcal{V} \times \mathrm{L}_0^2(\Omega)$ est solution du problème :

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_x v_1 - \partial_{33}^2 v_1 + \varepsilon^2 \mathbf{v} \nabla v_1 + \partial_1 q = 0 & \text{dans } \Omega \\ -\varepsilon^2 \Delta_x v_2 - \partial_{33}^2 v_2 + \varepsilon^2 \mathbf{v} \nabla v_2 + \partial_2 q = 0 & \text{dans } \Omega \\ -\varepsilon^4 \Delta_x v_3 - \varepsilon^2 \partial_{33}^2 v_3 + \varepsilon^4 \mathbf{v} \nabla v_3 + \partial_3 q = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_3 v_1 = \tau_1,\ \ \partial_3 v_2 = \tau_2,\ \ v_3 = 0 & \text{sur } \omega \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \tag{4}$$

Elle vérifie les équations (1) dans le sens faible suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{v} \in \mathcal{V},\ q \in \mathrm{L}_0^2(\Omega), \text{vérifiant :} \\ a(\mathbf{v}, \mathbf{w}_x) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + c(q, \mathbf{w}) = \tau(\mathbf{w}),\ \mathbf{w} \in \mathcal{V} \\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{5}$$

où

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega \varepsilon^2 \nabla_x \mathbf{v}_x \nabla_x \mathbf{w}_x \mathrm{d}x - \int_\Omega \varepsilon^2 (\mathbf{v} v_1 \nabla w_1 + \mathbf{v} v_2 \nabla w_2) \mathrm{d}x$$
$$+ \int_\Omega (\varepsilon^4 \nabla_x v_3 \nabla_x w_3 + \varepsilon^2 \partial_3 v_3 \partial_3 w_3) \mathrm{d}x - \int_\Omega \varepsilon^4 \mathbf{v} v_3 \nabla w_3 \mathrm{d}x$$

$$c(q, \mathbf{w}) = -\int_\Omega q\, \mathrm{div}(\mathbf{w}) \mathrm{d}x$$

$$\tau(\mathbf{w}) = \int_\omega (\tau_1 w_1 + \tau_2 w_2) \mathrm{d}\sigma$$

Faisant $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ dans (5), nous obtenons l'identité :

$$\varepsilon^2\big(||\nabla_x \mathbf{v}_x^\varepsilon||_2^2 + ||\partial_3 v_3^\varepsilon||_2^2\big) + ||\partial_3 \mathbf{v}_x^\varepsilon||_2^2 + \varepsilon^4 ||\nabla_x v_3^\varepsilon||_2^2 = \int_\omega (\tau_1 v_1^\varepsilon + \tau_2 v_2^\varepsilon)\mathrm{d}\sigma \tag{6}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré

$$||v||_2 \leq C||\partial_3 v||_2 \ \forall\ v \in \mathrm{H}_{0,1}(\partial_3, \Omega) \tag{7}$$

et l'inégalité des traces

$$||v||_{\mathrm{L}^2(\omega)} \leq C||\partial_3 v||_2 \ \forall\ v \in \mathrm{H}_{0,1}(\partial_3, \Omega) \tag{8}$$

nous déduisons de (6) et de l'équation de la conservation de la masse que la suite $\{\mathbf{v}_x^\varepsilon\}$ demeure dans un borné de $\mathcal{H}$ lorsque ε tend vers zéro. Par ailleurs, grâce à l'inégalité de Gagliardo dans $\mathrm{L}^3(\Omega)$:

$$||v||_3 \leq C||v||_2^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{3} ||\partial_i v||_2^{\frac{1}{6}}$$

nous avons les estimations :

$$||\varepsilon^2 \mathbf{v}^\varepsilon \nabla v_1^\varepsilon||_{\mathrm{W}^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)} + ||\varepsilon^2 \mathbf{v}^\varepsilon \nabla v_2^\varepsilon||_{\mathrm{W}^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)} + ||\varepsilon^4 \mathbf{v}^\varepsilon \nabla v_3^\varepsilon||_{\mathrm{W}^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{3}}$$

$$||\partial_1 q^\varepsilon||_{\mathrm{W}^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)} + ||\partial_2 q^\varepsilon||_{\mathrm{W}^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C$$

$$||\partial_3 q^\varepsilon||_{\mathrm{W}^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{4}{3}}$$

En utilisant l'inégalité (*voir* [2]) :

$$||q||_{\frac{3}{2}} \leq C\Big(||\nabla q||_{\left(\mathrm{W}^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)\right)^3} + |\int_\Omega q \ \mathrm{d}x|\Big) \ \forall q \in \mathrm{L}^{\frac{3}{2}}(\Omega),$$

nous obtenons finalement : $||q^\varepsilon||_{\frac{3}{2}} \leq C$.

Alors, quitte à extraire une sous-suite, on a les convergences :

a) $\mathbf{v}_x^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{v}_x$ dans $\mathcal{H}(\mathrm{div}_x)$ faible.

b) $q^\varepsilon \rightharpoonup q \in \mathcal{Q}^{\frac{3}{2}}$ dans $\mathrm{L}_0^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ faible.

Compte tenu de ces résultats, on peut effectuer le passage à la limite dans (5) pour les fonctions $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_x, 0)$, $\mathbf{w}_x \in \left(\mathrm{H}_{0,1}^1(\Omega)\right)^2$. Nous montrons alors que $(\mathbf{v}_x, q) \in \mathcal{H}(\mathrm{div}_x) \times \mathcal{Q}^{\frac{3}{2}}$ est solution du problème (3). On conclut, en particulier, que $\nabla q \in \left(\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\right)^3$ et par suite que $q \in \mathcal{Q}^2$. Enfin, comme $\mathrm{H}_{0,1}^1(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{H}$, nous avons la formulation variationnelle (3). La convergence de toute la suite est une conséquence de l'unicité de la solution.

Références bibliographiques

[1] A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat. Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow, Asymptotic Analysis, 9 (1994), 177–208.

[2] C. Amrouche, V. Girault. Decomposition of Vector Spaces and Application to the Stokes Problem in Arbitrary Dimension, Czechoslovak Math. J., 44 (1994), 109–140.

[3] O. Besson, M.R. Laydi, R. Touzani. Un modèle asymptotique en océonographie, C. R. Acad. Sci. Paris, 310 (1990), série I, 661–665.

[4] O. Besson, M.R. Laydi. Some Estimates for the Anisotropic Navier-Stokes and for the Hydrostatic approximation, M^{2}AN, 27 (1992), 855–865.

[5] R. Bunoiu, J. Saint Jean Paulin. Fluide à viscosité non linéaire dans un domaine de faible épaisseur dans le cas de lubrification, C. R. Acad. Sci. Paris, 323 (1996), série I, 1097–1102.

[6] J. Pedlosky. Geophysical fluid dynamics, Springer-Verlag, New York, 1987.