

Approximation d'un contrôle optimal distribué par un circuit électronique réparti: application au contrôle de vibrations

Mahamane KADER^a, Michel LENCZNER^a, Zeljko MRCARICA^b

^a Équipe de mathématiques de Besançon, Groupe matériaux intelligents 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France

Courriel : michel.lenczner@univ-fcomte.fr ; kader@math.univ-fcomte.fr ; zeljko@leda.elfak.ni.ac.yu

^b Faculty of Electronic Engineering, Beogradska 14, 18000 Nis, Yugoslavia

(Reçu le 28 février 2000, accepté le 6 mars 2000)

Résumé.

Ce travail concerne la discrétisation d'une loi de contrôle distribué pour un problème de contrôle de vibrations. Le cas envisagé ici est celui où les capteurs et les actionneurs sont supposés être nombreux et distribués de façon périodique dans la structure hôte. Dans ce cadre, nous posons la question suivante : « Peut-on construire une bonne approximation d'une loi de contrôle optimal dont la réalisation technologique soit réaliste ? » Une solution à ce problème est proposée, dans le cas de capteurs et d'actionneurs piézo-électriques distribués dans une plaque mince élastique. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

homogénéisation / vibrations / contrôle optimal / circuit électronique / contrôle distribué / approximation de contrôle optimal

Approximation of an optimal control law using a distributed electronic circuit: application to vibration control

Abstract.

This paper focuses on the design of distributed control related to distributed mechanical systems. Sensors and actuators are assumed to be numerous and periodically distributed. The problem addressed in this paper is: "Can we find a way to approximate an optimal control law with a distributed electronic circuit?" A solution to this problem is proposed in the framework of vibration control of a thin plate using piezoelectric actuators and sensors. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

homogenization / vibration / optimal control / electronic circuit / distributed control / optimal control approximation

Abridged English version

This paper is related to a distributed control problem arising in structural mechanics. Consider a thin beam covered on one side with a distribution of piezoelectric actuators, and on the other side, with piezoelectric sensors. Assume that this beam is subjected to either external forces or initial excitation. Our control objective is the optimal reduction of the vibration level.

The control strategy determination can be based on different theories. One of them, the optimal control theory, leads to an explicit expression of the control law. It has the advantage to be optimal, relatively to a

Note présentée par Pierre PERRIER.

choice of functional that is minimized. Mathematical foundations of such a theory are well established and are classical also for infinite dimensional systems. In practice, there is a strong limitation in use of it for distributed control with many actuators and sensors. In fact, it produces a control law requiring that each actuator uses the data coming from every sensors. This constraint is generally unacceptable for realistic fabrication of distributed control systems.

The goal of this paper is to propose a new implementation of optimal control that does not suffer such a limitation. We show how optimal control can be applied, in a realistic way, using a distributed electronic circuit. Each (actuator, sensor) couple is only linked with its closer neighbors.

Let us remark that the problem of vibration control for a one dimensional beam is quite simple and does not require a distribution of many actuators and sensors. However, this study is a preliminary investigation before considering more complex cases of distributed control. Further interesting applications could be acoustic control or fluid flow control.

In this paper we present an approximation of an optimal control law using a distributed electronic circuit. The statement of model and its reduction using asymptotic analysis are given. This simplified model is used in order to construct an optimal control law. An approximation of the solution of the Riccati equation with partial differential operations is derived. Then, we deduce its approximation by distributed analog circuit. Some numerical results are presented.

1. Introduction

Cette note est relative à un problème de contrôle distribué rencontré en mécanique des structures. Considérons une plaque élastique sur les faces de laquelle sont répartis de façon périodique des transducteurs piézo-électriques. Sur une face, les pastilles piézo-électriques seront utilisées comme des capteurs alors que sur l'autre face, placés de façon symétrique, il le seront comme des actionneurs. Le système ainsi constitué est soumis à une excitation initiale. Nous nous intéressons ici au problème de la réduction de son niveau de vibrations.

Pour aborder un tel problème, différentes stratégies de contrôle peuvent être envisagées. La théorie du contrôle optimal, conduit à une expression explicite de la loi de contrôle. Son avantage est qu'elle est optimale, relativement au choix de la fonctionnelle que l'on souhaite minimiser. Les fondements mathématiques de cette théorie, bien établis, sont classiques, y compris dans le cas de systèmes de dimension infinie comme celui que nous considérons ici. Du point de vue technologique, son utilisation à des problèmes de contrôle distribué, lorsque le nombre d'actionneurs et de capteurs est élevé, est généralement considérée comme beaucoup trop lourde pour être mise en oeuvre. En effet, ce type de théorie conduit à des lois de contrôle telles que la rétroaction de chaque actionneur dépend à chaque instant des mesures de tous les capteurs. Pratiquement, cela signifie que chaque actionneur doit être connecté à chaque capteur. Dès que le nombre de paires actionneur/capteur devient trop grand, cette contrainte est rédhibitoire.

Dans cette note, nous présentons une méthodologie permettant de construire une approximation d'une loi de contrôle optimal dans le cadre décrit ci-dessus. Tout en ayant les avantages de la théorie du contrôle optimal, cette approximation ne présente pas l'inconvénient de la complexité mentionné ci-dessus. Nous montrons également comment elle peut être mise en oeuvre par un circuit électronique distribué simple. Cette implémentation, ne nécessite que la connection des transducteurs avec leurs voisins les plus proches. Enfin, les résultats d'une simulation numérique du système complet sont présentés et discutés.

2. Les équations du système

Le mouvement d'une plaque élastique équipée d'une distribution de transducteurs piézo-électrique est régi par les équations de la dynamique : $\int_{\Omega^a} \rho^a \partial_{tt}^2 u_i^a \cdot v_i + \sigma_{ij}^a \cdot s_{ij}(v) dx = 0$ pour tout champ

de déplacement admissible v et par celle de l'électrostatique $\int_{\Omega^a} D_i^a \partial_i \psi \, dx = 0$ pour tout potentiel électrique admissible ψ . Ici, Ω^a , ρ^a , u^a , σ^a et D^a représentent le domaine occupé par la plaque, la masse volumique, le vecteur des déplacements mécaniques, le tenseur des contraintes et le vecteur des déplacements électriques. L'indice a est relatif à l'épaisseur de la plaque. Le tenseur des contraintes mécaniques et les déplacements électriques sont supposés être des combinaisons linéaires du tenseur des déformations $s_{kl}(u^a)$ et du champ électrique $\partial_k \varphi^a$ (ici φ^a représente le potentiel électrique) :

$$\sigma_{ij}^a = R_{ijkl} s_{kl}(u^a) + e_{kij} \partial_k \varphi^a \quad \text{et} \quad D_i^a = e_{ikl} s_{kl}(u^a) - \varepsilon_{ij} \partial_j \varphi^a.$$

Les R_{ijkl} , e_{kij} et ε_{ki} sont respectivement, le tenseur des raideurs, celui des coefficients de piézo-électricité et la matrice des permittivités. Du point de vue des conditions aux limites imposées, nous supposons que les deux extrémités de la poutre sont encastées et que les autres bords sont libres. Par ailleurs, toutes les faces latérales des transducteurs piézo-électriques sont supposées être isolées électriquement de leur environnement. Leurs faces inférieures sont reliées à la terre. Les faces supérieures des capteurs sont reliées à l'entrée d'amplificateurs courant-courant, alors que celles des actionneurs sont reliées à la sortie d'amplificateurs de tension-tension. Enfin, le déplacement mécanique est soumis à des conditions initiales. Pour plus de détails concernant ce modèle, on se référera à [1].

3. Les deux étapes de simplification du modèle

Comme il a déjà été dit plus haut, la mise en oeuvre d'un contrôleur optimal à partir du modèle précédent serait beaucoup trop lourde. Pour cette raison, deux simplifications du modèle sont effectuées.

3.1. Modèle simplifié de plaque mince

La plaque considérée est supposée être mince. Utilisant cette hypothèse, nous avons montré dans [1] que le modèle ci-dessus peut être approché par le modèle bidimensionnel suivant : $\int_{\bar{\omega}} \rho \partial_{tt}^2 uv + (c_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta}^2 u + e_{\alpha\beta\varphi}) \partial_{\alpha\beta}^2 v \, dx = 0$ où $\bar{\omega}$, ρ , u , $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $e_{\alpha\beta}$ et φ représentent respectivement la surface moyenne de la plaque, sa masse surfacique, le déplacement transverse, le tenseur des raideurs de flexion, le tenseur des coefficients piézo-électriques surfaciques et la tension électrique aux bornes de chaque transducteur. Dans ce modèle, la charge par unité de surface sortant d'un capteur S est $q = e_{\alpha\beta} \frac{1}{|S|} \int_S \partial_{\alpha\beta}^2 u \, ds$. La simulation numérique présentée dans la dernière partie de cette note est basée sur ce modèle bidimensionnel de plaque.

3.2. Modèle homogénéisé de plaque

En tirant parti du fait que les transducteurs piézo-électriques sont distribués périodiquement dans la plaque, il est possible d'obtenir un modèle simplifié de ce système couplé en utilisant la théorie de l'homogénéisation. Ceci a été effectué dans [2]. Il en résulte le modèle d'un milieu continu homogène qui a une structure identique à celle du modèle bidimensionnel de plaque. Néanmoins, dans ce nouveau modèle, les tenseurs de raideur, de piézo-électricité et la matrice de permittivité y sont constants. Les sources de courant produites par les capteurs piézo-électriques sont modélisées par une distribution continue d'un champs de courants électriques. Quand aux tensions appliquées sur les actionneurs, elles sont représentées par une distribution continue de tensions. C'est à partir de ce modèle homogénéisé qu'il est possible d'apporter une réponse à la question posée dans l'introduction.

Néanmoins, afin d'alléger l'exposé de la méthode, le modèle homogénéisé sera encore simplifié. En supposant que le mouvement de la plaque est principalement un mouvement de flexion dans sa direction longitudinale le modèle de plaque homogénéisé peut être remplacé par un modèle posé dans un domaine de dimension 1 : $\partial_{tt}^2 u(t, \xi) + r \Delta^2 u(t, \xi) + d \Delta \varphi(t, \xi) = 0$ pour $(t, \xi) \in \mathbb{R}^{*+} \times \omega$. Ici, $r = c_{1111}/\rho$, $d = e_{11}/\rho$, $e = e_{11}$, $\Delta = \partial_{\xi\xi}^2$ et ω est la section longitudinale de $\bar{\omega}$. Les conditions aux limites d'encastrement deviennent $u(t, \xi) = \partial_{\xi} u(t, \xi) = 0$ en $(t, \xi) \in \mathbb{R}^{*+} \times \partial\omega$ et les conditions initiales $u(0, \xi) = g(\xi)$ et $\partial_t u(0, \xi) = 0$. Les densités de charge et de courant mesurées sont $q = e \Delta u$ et $i = e \Delta \partial_t u$.

4. Formulation du problème de contrôle optimal

L'équation précédente est choisie comme équation d'état du problème de contrôle. Elle peut être formulée sous forme d'un système d'équations opératoriels du premier ordre : $\partial_t x = \mathcal{A}x + Bv$ pour $t > 0$ et $x(0) = x^0$. Ici, la variable d'état $x = {}^t(x_1, x_2) = {}^t(u, \partial_t u)$ appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$ où $\mathcal{H} = H_0^2(\omega) \times L^2(\omega)$ et $H_0^2(\omega) = \{u \in H^2(\omega), u = \partial_\xi u = 0 \text{ en } \xi \in \partial\omega\}$. Le domaine de l'opérateur $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -rA & 0 \end{pmatrix}$, où $A = \Delta^2$, est $D(\mathcal{A}) = H^4(\omega) \cap H_0^2(\omega) \times H_0^2(\omega)$. La variable v de contrôle est choisie dans l'espace $U = H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$, et l'opérateur de contrôle $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -d\Delta \end{pmatrix}$ est donc défini de $U = H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ dans \mathcal{H} . La fonctionnelle coût du problème de contrôle optimal est $J(v) = \int_0^\infty |Cx|_Y^2 + |v|_U^2 dt$. Nous choisissons $Cx = (d_1 \text{Id } 0) : \mathcal{H} \rightarrow Y = H_0^2(\omega)$, d_1 étant une constante.

Comme les couples (\mathcal{A}, B) et (C, \mathcal{A}) sont respectivement stabilisable et détectable, le problème de minimisation $\min_{v \in U} J(v)$, sous la contrainte : le couple (x, v) est solution de l'équation d'état, admet une solution unique. Cette dernière est $v = -B^* X x$ où X est l'unique opérateur borné auto-adjoint non négatif solution de l'équation algébrique de Riccati $(\mathcal{A}^* X + X \mathcal{A} - X B B^* X + C^* C) y = 0$, pour tout $y \in D(\mathcal{A})$. Les opérateurs \mathcal{A}^*, B^* et C^* sont les opérateurs adjoint de \mathcal{A}, B et C . Ils sont définis de la façon suivante : $\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & -r \text{Id} \\ A & 0 \end{pmatrix}$, $B^* x = (0, -d\Delta^{-1}) : \mathcal{H} \rightarrow U$ et $C^* = (d_1 \text{Id}) : Y \rightarrow \mathcal{H}$.

Remarques. – (i) Le choix de l'espace U a pour conséquence que $B B^* = d^2 \text{Id}$ est un opérateur qui ne contient pas d'opérateur aux dérivées partielles. Dans le cas d'un problème de contrôle interne total, un tel choix est toujours possible, et n'affecte pas la loi de contrôle. Le fait que X s'écrit sous forme d'un développement en puissances de A repose sur ce choix.

(ii) La stabilisation du système par une rétroaction proportionnelle au courant : $\varphi = ki = ke \partial_{\xi\xi t}^3 u$ conduit au système exponentiellement stable $\partial_{tt}^2 u + r\Delta^2 u + d\Delta^2 \partial_t u = 0$. L'action de ce contrôleur n'est pas uniforme par rapport aux fréquences. Elle est une fonction qui croît comme le carré de la fréquence. En conséquence, l'énergie dépensée par le système de contrôle croît dans la même proportion. Dans la pratique, une telle loi de contrôle conduit à la saturation rapide des amplificateurs et/ou des actionneurs.

(iii) Le choix de la fonctionnelle $J(v)$ a été effectué de sorte que l'action du contrôleur soit uniforme par rapport aux fréquences. Ce choix présente l'avantage d'éviter la saturation intempestive du système de contrôle.

(iv) Pour d'autres objectifs de contrôle interne, d'autres fonctionnelles auraient pu être utilisées et la même méthodologie pourrait être appliquée.

5. Étapes pour l'approximation de la loi de contrôle

5.1. Approximation de X par une somme d'opérateurs

La solution X de l'équation de Riccati est une matrice 2×2 d'opérateurs $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$. Chacun des opérateurs X_{ij} est un opérateur pseudo-différentiel qu'il n'est pas possible de discrétiser directement et de manière simple au sens où nous l'entendons ici. L'analyse de l'équation algébrique de Riccati indique que X peut s'écrire sous la forme d'une série de puissance de l'opérateur A : $X = \sum_{i \in \mathbb{Z}} X_i A^i$. En introduisant cette expression dans l'équation de Riccati et en identifiant les termes de même ordre, nous en déduisons l'approximation :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \frac{d_1 \sqrt{r}}{d} + \frac{3dd_1^3}{8r^{3/2}} A^{-1} & \frac{d_1^2}{2r} A^{-1} \\ \frac{d_1^2}{2r} & \frac{d_1}{d\sqrt{r}} - \frac{dd_1^3}{8r^{5/2}} A^{-1} \end{pmatrix}$$

L'erreur d'approximation peut être mesurée par la norme de l'opérateur résidu :

$$A^* \bar{X} + \bar{X} A - \bar{X} B B^* \bar{X} + C^* C = \begin{pmatrix} -\frac{d^2 d_1^4}{4r^2} A^{-1} & \frac{d^3 d_1^5}{16r^{7/2}} A^{-2} \\ \frac{d^3 d_1^5}{16r^{7/2}} A^{-1} & \frac{d^2 d_1^4}{4r^3} A^{-1} - \frac{d^4 d_1^6}{64r^5} A^{-2} \end{pmatrix}$$

L'approximation de l'opérateur X par \bar{X} est une approximation au sens des hautes fréquences. Une étude numérique préalable nous a montré que la contribution du terme $-dd_1^3 A^{-1}/(8r^{5/2})$ dans \bar{X}_{22} est négligeable devant celle de $d_1/(d\sqrt{r})$. C'est pourquoi, dans la suite, elle est négligée. Remarquons que l'utilisation de ce \bar{X} à la place de X dans la loi de contrôle conduit à un système qui est encore exponentiellement stable.

La détermination du contrôle v se fait par la résolution de la cascade d'équations suivantes. Étant donné la distribution des charges q et des courants et i , le déplacement $u \in H_0^1(\omega)$ et la vitesse $\partial_t u \in H_0^1(\omega)$ sont déterminées par la résolution des équations $e\Delta u = q$ et $e\Delta \partial_t u = i$ dans ω . Le contrôle $v \in H_0^1(\omega)$ est à son tour déterminé en résolvant l'équation $-\Delta v = d(\bar{X}_{21} u + \bar{X}_{22} \partial_t u)$ dans ω .

5.2. Approximation de \bar{X} par un circuit électronique distribué

La cascade d'équation précédente peut être aisément discrétisée par un schéma de différences finies. C'est cette discrétisation qui est utilisée comme loi de contrôle du modèle non homogénéisé. La distance entre deux capteurs (ou deux actionneurs) est notée h . Les équations ci-dessus sont discrétisées suivant un maillage de ω dont les noeuds sont situés au centre des capteurs (ou des actionneurs). Les opérateurs Δ présents dans la cascade d'équation sont tous discrétisés par un schéma à trois points. L'implémentation en terme de circuit électronique distribuée de l'approximation de la loi de contrôle distribué est représentée sur la *figure 1*.

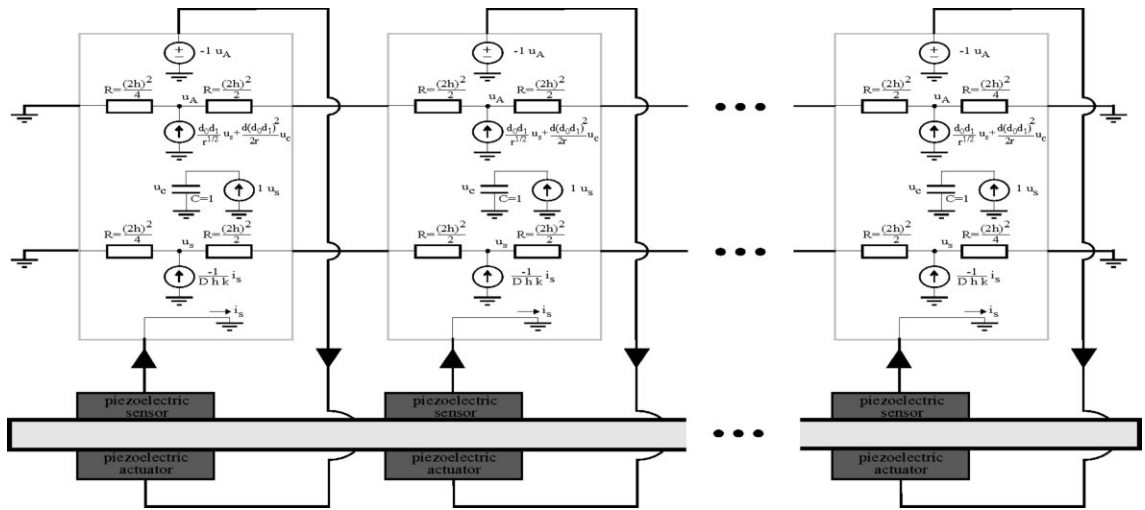
6. Analyse du contrôleur discrétisé

La plaque élastique utilisée dans la simulation numérique est en laiton. Ses dimensions sont de 95 mm × 5 mm et d'épaisseur 2 mm. Les dix transducteurs piézo-électriques sont des céramiques de PZT. Leurs dimensions sont de 5 mm × 5 mm et leur épaisseur est de 0,2 mm. Ils sont espacés les uns les autres d'une distance de 5 mm.

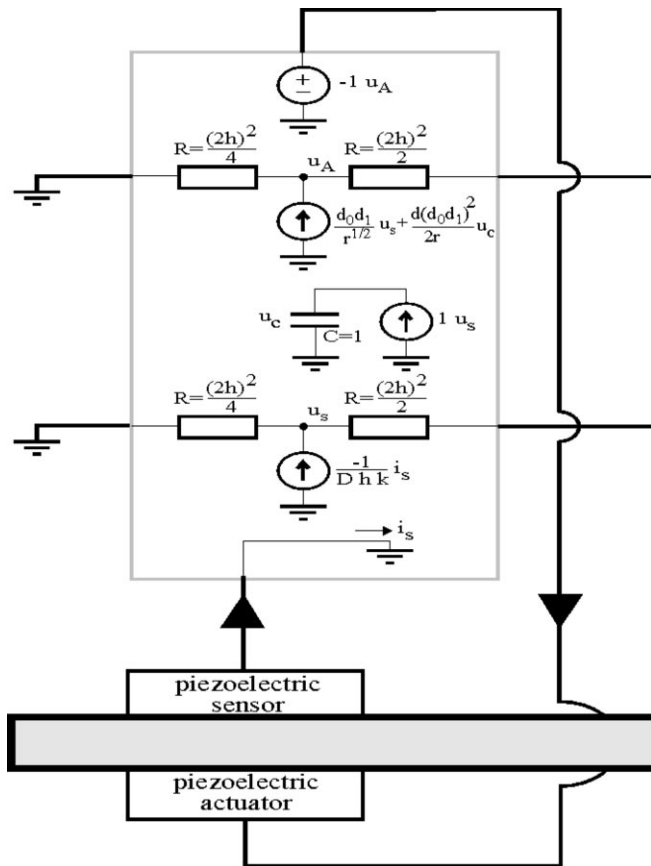
Le modèle bidimensionnel de plaque non homogénéisé est discrétisé à l'aide d'une méthode d'éléments finis. Le simulateur de circuit électronique ALECSIS [3] a été utilisé pour effectuer la simulation numérique du système global comprenant la structure mécanique et le circuit électronique distribué. À cet effet, une interface a été réalisée entre un logiciel d'éléments finis et ce logiciel. Le logiciel d'éléments finis fournit le maillage et les matrices élémentaires. Ceux-ci ainsi que la description du circuit électronique sont introduits dans le logiciel ALECSIS. Ce dernier effectue alors l'assemblage du système global ainsi que sa résolution.

L'élément fini de plaque utilisé est l'élément d'Adini. Le potentiel électrique est choisi constant par élément. La plaque est discrétisée à l'aide de 19 éléments dans la direction longitudinale et d'un élément dans l'autre direction. La condition initiale excite les deux premiers modes de vibration de la poutre.

L'effet du contrôleur optimal approché est comparé à celui du contrôle par rétroaction simple $\varphi = ki$. Le coefficient k a été choisi de façon à ce que, pour les deux contrôleurs, les taux de décroissance du premier mode propre soient à peu près identiques. La *figure 2* représente l'évolution temporelle des modes 1 et 2 de déplacements au premier tiers de la plaque. La *figure 3* représente l'évolution des tensions appliquées au troisième actionneur. Conformément aux prédictions théoriques, le contrôleur agissant par simple rétroaction amortit très rapidement le second mode. Dans cette phase d'ammortissement, la tension appliquée est très élevée. Évidemment celle-ci diminue lorsque l'amplitude du mode devient négligeable. L'utilisation de l'approximation du contrôle optimal produit un taux de décroissance du premier mode qui est comparable à celui du second mode. En conséquence, pour le second mode, la tension appliquée aux



(a)



(b)

Figure 1. (a) Circuit électronique distribué. (b) Zoom sur la première cellule.

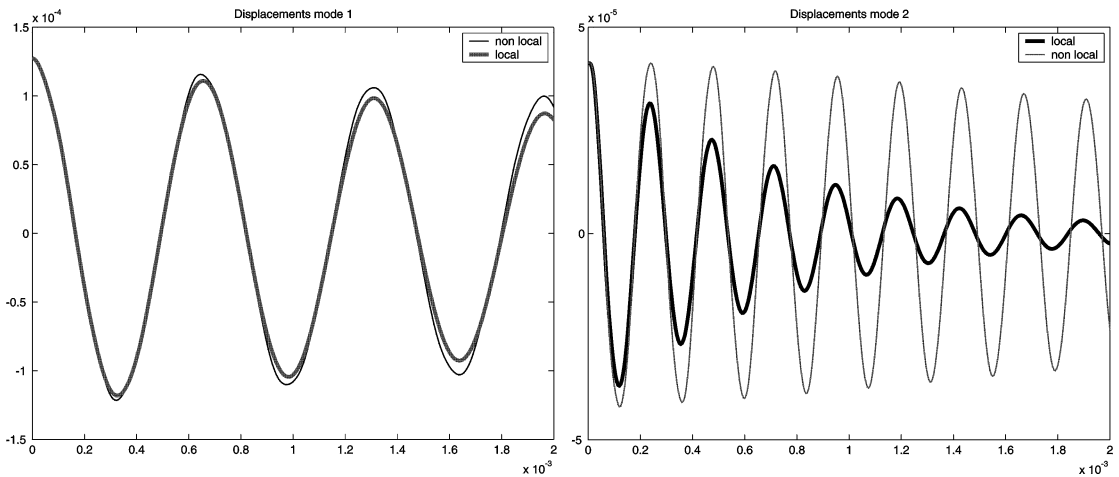


Figure 2. Déplacements pour les modes 1 et 2.

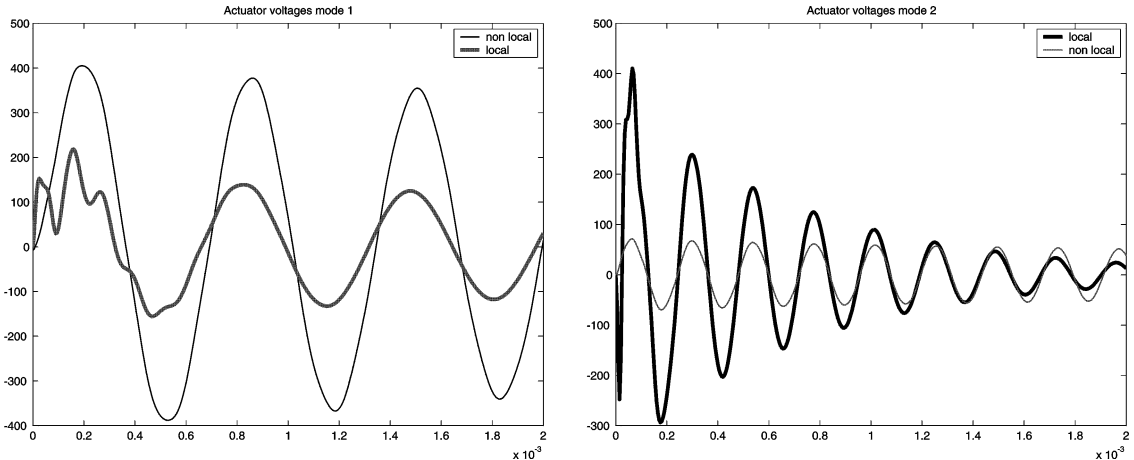


Figure 3. Tensions pour les modes 1 et 2.

actionneurs est beaucoup moins importante avec le circuit non local qu'avec le circuit local. Évidemment, ce phénomène se manifeste de façon encore plus prononcée pour les modes suivants.

Remarquons néanmoins que contrairement aux prévisions théoriques, la tension appliquée relativement au premier mode est plus importante pour le circuit non local que pour le circuit local, alors qu'un calcul effectué sans approximation indique qu'elles devraient être sensiblement égales. Cet écart résulte de l'erreur commise en effectuant l'approximation du Laplacien par le schéma de différences finies à trois points. Cette erreur semble surtout avoir un effet important au voisinage du point d'encastrement qui cause une perte d'efficacité du contrôleur non local.

Références bibliographiques

- [1] Canon E., Lenczner M., Models of elastic plates with piezoelectric inclusions, Part I: Models without homogenization, *Math. Comput. Modelling* 26 (5) (1997) 79–106.
- [2] Canon E., Lenczner M., Deux modèles de plaque mince avec inclusions de piézoélectriques et circuits électroniques distribués, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib* 326 (1998) 793–798.
- [3] ALECSIS, <http://venus.elfak.ni.ac.yu/~homer/ealecsis.htm>