C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 179-183, 1998
Contrôle optimal/*Optimal Control*

Paramétrisation des contrôleurs H_∞ sous-optimaux Application à l'équation des ondes

Mahamane KADER, Michel LENCZNER

Équipe de mathématiques de Besançon, UMR 6623, Université de Franche-Comté, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France

(Reçu le 27 février 1998, accepté après révision le 6 juillet 1998)

Résumé. On propose une paramétrisation des contrôleurs dynamiques H_∞ sous-optimaux pour certains systèmes de dimension infinie, tels que ceux étudiés dans [1]. Nous contruisons un contrôleur particulier pour l'équation des ondes avec un contrôle et une perturbation internes. Cette paramétrisation est une extension en dimension infinie de celle obtenue par P. Gahinet en dimension finie [3]. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Parametrization of suboptimal H_∞ controllers
Application to the wave equation

Abstract. *A parametrization of the suboptimal H_∞ dynamic controllers is proposed for some infinite-dimensional systems, like those studied in* [1]. *We construct a particular controller to the wave equation with internal control and internal disturbance. This parametrization is the generalization to the infinite-dimensional case, of a result obtained by P. Gahinet for the finite-dimensional case* [3]. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

1. A dynamic controller for the wave equation

Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^n$ with a regular boundary. Let us consider the wave equation:

$$G : \begin{cases} u'' = \Delta u + w_2 + v & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0) = u'(0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ z_1 = u & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ z_2 = v & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ y = u + w_1 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

where $u : \mathbb{R}^+ \to X$ is the state of the system, the control input is $v \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ and the perturbation input is $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in (L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)))^2$. The system (1) can be written as a first order system:

$$G : \begin{cases} x' = Ax + B_1 w + B_2 v \\ z = C_1 x + D_{12} v \\ y = C_2 x + D_{21} w, \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

where $x = (u, u')^T$, and $X = Z = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $U = Y = L^2(\Omega)$, $W = (L^2(\Omega))^2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $B_2 = D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $C_2 = D_{21} = (I, 0)$.

THE PROBLEM $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$

We search for the dynamic controllers $K = (A_K, B_K, C_K)$,

$$K : \begin{cases} p' = A_K p + B_K y, \quad p(0) = 0, \\ v = C_K p, \end{cases} \tag{3}$$

that take y as an input and produce the output v. Here $A_K : D(A_K) \hookrightarrow V_K \to V_K$, is an infinitesimal generator of a C_0-semigroup $S_K(t)$ on a separable real Hilbert space V_K with domain $D(A_K)$, $B_K \in \mathcal{L}(Y, V_K)$ and $C_K \in \mathcal{L}(V_K, U)$.

For a given number $\gamma > 0$, the problem $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$ consists of finding a dynamic controller K such that the feedback $v = Ky$ stabilizes the system (2) and reduces the influence of the disturbance w to the output z. That is

$$\mathcal{P}_\infty(\gamma) : \text{ find } K \text{ stabilizing (2) such that } \|\mathcal{F}(G, K)\| < \gamma,$$

where $\mathcal{F}(G, K) : L^2(\mathbb{R}^+, W) \to L^2(\mathbb{R}^+, Z)$, $w \mapsto z$, is the closed loop operator, and $\|\mathcal{F}(G, K)\|$ its norm.

We denote by γ_{opt}, the smallest positive number γ, for which $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$ has a solution.

Now, let us denote $V_K = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, we contruct a particular controller for the above system, as follows

$$C_K = -B_2^* P, \tag{4}$$

and

$$B_K = -\left(\gamma^{-2} QP - I\right)^{-1} QC_2^*. \tag{5}$$

Then

$$A_K = A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^* - B_2 B_2^*)P + \left(\gamma^{-2} QP - I\right)^{-1} QC_2^* C_2, \tag{6}$$

where

$$P = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\Delta - \Delta A_I)^{\frac{1}{2}} A_I & -I + A_I \\ -\Delta(-I + A_I) & \sqrt{2}(\Delta - \Delta A_I)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$Q = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\Delta - \Delta A_I)^{\frac{1}{2}} & -I + A_I \\ -\Delta(-I + A_I) & \sqrt{2}(\Delta - \Delta A_I)^{\frac{1}{2}} A_I \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$A_I(\gamma,\Delta) = \left(1 + \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}(-\Delta)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

THEOREM 1. – *For γ strictly greater than γ_{opt} ($\gamma_{\text{opt}} > 0$), the system K characterized by the above A_K, B_K, C_K, belongs to $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$.*

Dans ce travail, nous proposons une méthode pour déterminer une classe de contrôleurs H_∞ sous-optimaux, qui conduisent à la stabilité exponentielle de certains systèmes exactement observables. Nous commençons par construire un contrôleur particulier pour l'équation des ondes, avec un contrôle et une perturbation internes, puis nous généralisons ce résultat. De fa çon similaire, mais avec des calculs plus lourds, on peut obtenir une grande classe de stabilisateurs. Ceci permet d'envisager la construction d'une méthode d'optimisation de stabilisateurs à l'intérieur de cette classe.

1. Stabilisateurs dynamiques pour l'équation des ondes

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière. On considère l'équation des ondes (1), où $x : \mathbb{R}^+ \to X$ est l'état du système, $v \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ le contrôle interne (force interne), et $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in (L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)))^2$ la perturbation interne (un bruit par exemple), y est l'observation, utilisée pour le contrôle (mesure de l'état), et z la sortie à mesurer, utilisée pour évaluer l'efficacité du contrôleur.

POSITION DU PROBLÈME $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$

On cherche des stabilisateurs dynamiques K, ayant y comme entrée et v comme sortie,

$$K : \begin{cases} p' = A_K p + B_K y, \quad p(0) = 0, \\ v = C_K p, \end{cases} \tag{10}$$

où $A_K : D(A_K) \hookrightarrow V_K \to V_K$ est générateur d'un C_0-semi-groupe $S_K(t) = e^{A_K t}$ sur un espace de Hilbert V_K, $B_K \in \mathcal{L}(Y, V_K)$ et $C_K \in \mathcal{L}(V_K, U)$.

Par substitution du système (10) dans (2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}' = \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \mathcal{B}w, \qquad \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \\ &z = \mathcal{C}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{11}$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_K D_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = (C_1 \quad D_{12} C_K). \tag{12}$$

Dans la suite, on considère des stabilisateurs tels que l'opérateur linéaire $\mathcal{F}(G,K) : L^2(\mathbb{R}^+, W) \to L^2(\mathbb{R}^+, Z)$, $\mathcal{F}(G,K)(w) = z = C_1 x + D_{12} C_K p$, où (x,p) est solution de (11) et (12), soit défini. De plus, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ est observable.

DÉFINITION 1. – Soit γ un nombre positif donné, $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$ est la classe des stabilisateurs dynamiques K, de la forme (10), ayant les propriétés suivantes :

(i) l'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \hookrightarrow X \times V_K \to X \times V_K$ est générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe exponentiellement stable sur $X \times V_K$;

(ii) $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ est exponentiellement stabilisable et $(\mathcal{A}^*,\mathcal{C}^*)$ est exactement contrôlable ;
(iii) $\|\mathcal{F}(G,K)\| < \gamma$.

Nous notons γ_{opt} le plus petit nombre positif γ, pour lequel $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$ a une solution.
Ici nous supposons que $V_K = \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$, et soit γ strictement supérieur à γ_{opt}.

THÉORÈME 1. – *Pour γ strictement supérieur à $\gamma_{\text{opt}} > 0$, le système K représenté par (A_K, B_K, C_K) défini par* (4)–(9) *appartient à $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$.*

Remarques. – (i) Pour cet exemple, la valeur de γ_{opt} dépend de la première valeur propre de l'opérateur de Laplace Δ.
(ii) Ce contrôleur est obtenu à partir d'un calcul explicite des solutions P et Q des équations (15), (16) ci-dessous, et du choix de $M = \mathrm{Id}$.
(iii) Ce théorème est une conséquence du théorème général énoncé au paragraphe suivant.

2. Cadre général

Soient X, U, W, Y, Z des espaces de Hilbert réels et séparables et A un opérateur de domaine $\mathrm{D}(A)$, générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu (ou C_0-semi-groupe) e^{At} sur X, $B_1 \in \mathcal{L}(W,X)$, $B_2 \in \mathcal{L}(U,X)$, $C_1 \in \mathcal{L}(X,Z)$, $C_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$, $D_{12} \in \mathcal{L}(U,Z)$, $D_{21} \in \mathcal{L}(W,Y)$. Ici $\mathcal{L}(X,Y)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X sur Y. On note $K^* \in \mathcal{L}(Y,X)$, l'adjoint hilbertien de $K \in \mathcal{L}(X,Y)$. Soit G un système de dimension infinie, décrit par :

$$\begin{cases} x' = Ax + B_1 w + B_2 v, \\ z = C_1 x + D_{12} v, \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

avec une observation donnée par

$$y = C_2 x + D_{21} w, \tag{14}$$

où $x : \mathbb{R}^+ \to X$ est l'état du système, $v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+, U)$ le contrôle, $w \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+, W)$ la perturbation, $y \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+, Y)$ l'observation et $z \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+, Z)$ la sortie à mesurer. Nous noterons le produit scalaire d'un espace H par $(\cdot,\cdot)_H$ et la norme correspondante par $|\cdot|_H$. Nous supposerons, pour simplifier les formules, dans toute la suite que :
(H1) $D_{12}^* D_{12} = \mathrm{Id}$ et $D_{12}^* C_1 = 0$ sur X ;
(H2) $D_{21} D_{21}^* = \mathrm{Id}$ et $D_{21} B_1^* = 0$ sur X.
On utilise la définition de $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$ introduite au paragraphe 2.1.

LE PROBLÈME $\mathcal{Q}_\infty(\gamma)$
En plus des hypothèses (H1) et (H2), nous supposerons que :
(H3) (A, B_2) est exponentiellement stabilisable et (A, C_2) est exponentiellement détectable ;
(H4) (A, B_1) et (C_1^*, A^*) sont exactement contrôlables.
Le cadre de travail est celui de [1].

DÉFINITION 2. – Nous appelons $\mathcal{Q}_\infty(\gamma)$ la classe des stabilisateurs de la forme (10), construits comme suit : $A_K : \mathrm{D}(A_K) \hookrightarrow V_K \to V_K$, $B_K \in \mathcal{L}(Y, V_K)$, $C_K \in \mathcal{L}(V_K, U)$. De plus, il existe deux opérateurs positifs auto-adjoints, coercifs $P \in \mathcal{L}(X)$ et $Q \in \mathcal{L}(X)$, et deux opérateurs injectifs d'images fermées $M \in \mathcal{L}(V_K, X)$ et $N \in \mathcal{L}(V_K, X)$, tels que :

$$\begin{aligned} &(Ax, Py)_X + (Px, Ay)_X + \big(P(\gamma^{-2} B_1 B_1^* - B_2 B_2^*)Px, y\big)_X \\ &+ (C_1 x, C_1 y)_Z + ((PB_2 + MC_K^*)^* x, (PB_2 + MC_K^*)^* y)_U = 0 \\ &\qquad \text{pour tous } x, y \in D(A), \end{aligned} \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
&(Qx, A^*y)_X + (A^*x, Qy)_X + \big(Q(\gamma^{-2}C_1^*C_1 - C_2^*C_2)Qx, y\big)_X \\
&+ (B_1^*x, B_1^*y)_W + ((QC_2^* + NB)^*x, (QC_2^* + NB_K)^*x)_Y = 0 \\
&\qquad \text{pour tous } x, y \in D(A),
\end{aligned} \tag{16}
$$

avec

$$
MN^* = \gamma^{-2}PQ - I, \tag{17}
$$

$$
r_\sigma(PQ) = r_\sigma(QP) < \gamma^2. \tag{18}
$$

Puis, nous calculons A_K par la formule,

$$
\begin{aligned}
A_K\widetilde{M}^* = {} & M^*(A + \gamma^{-2}B_1B_1^*P + B_2C_KM^*) \\
& - B_KC_2 + \gamma^{-2}\widetilde{N}^{-1}QMC_K^*(B_2^*P + C_KM^*),
\end{aligned} \tag{19}
$$

où $\widetilde{M}$ et $\widetilde{N}$ sont les opérateurs bijectifs associés à M et N.

Le résultat principal est donné par le théorème suivant.

THÉORÈME 2. – *Étant donné un nombre γ strictement supérieur à $\gamma_{\text{opt}} > 0$. On suppose que* (H1) *et* (H2) *sont satisfaites ;*

(i) *si K appartient à $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$, alors K appartient à $\mathcal{Q}_\infty(\gamma)$,*

(ii) *supposons en plus que* (H3) *et* (H4) *sont satisfaites, si K appartient à $\mathcal{Q}_\infty(\gamma)$, alors K appartient à $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$.*

Démonstration. – La démonstration de ce théorème est détaillée dans [4]. Elle est basée sur le lemme du réel borné, démontré dans [2], et une extension en dimension infinie d'un lemme algébrique de décomposition d'opérateur, énoncé dans [3].

Références bibliographiques

[1] Flandoli F., Lasiecka I., Triggiani R., Algebraic Riccati equations with non-smoothing observation arising in Hyperbolic and Euler–Bernoulli equations, Ann. Mat. Pura Appl. Cliii (1988) 307–382.

[2] Curtain R.F., The strict bounded real lemma in infinite dimensions Systems Control Lett. 20 (1993) 113–116.

[3] Gahinet P., A new parametrization of H_∞ suboptimal controllers, Int. J. Control 59 (4) (1994) 1031–1051.

[4] Kader M., Lenczner M., Parametrization of suboptimal H_∞ stabilizers, Prépublication de l'équipe de mathématiques de Besançon 98/18, 1998.